

# **Física nuclear**

Ramón Niembro

Ampliado por: Benito Marcote

Física Nuclear y de Partículas

Universidad de Cantabria

4º de física

Santander, 2010



# Contenidos

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Propiedades globales del núcleo</b>                     | <b>7</b>  |
| 1.1      | Introducción   | 7         |
| 1.1.1    | Órdenes de magnitud y unidades                             | 7         |
| 1.1.2    | Constituyentes del núcleo                                  | 8         |
| 1.2      | Descripción del núcleo como un sistema cuántico            | 9         |
| 1.2.1    | Regla de oro de Fermi                                      | 10        |
| 1.2.2    | Distribución de carga y de materia                         | 12        |
| 1.3      | Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas         | 15        |
| 1.3.1    | Modelo de la gota líquida y fórmula semiempírica de masas  | 16        |
| 1.3.2    | Término de asimetría                                       | 18        |
| 1.3.3    | Término de pairing   | 19        |
| 1.3.4    | Consecuencias de la F.S.M. y limitaciones                  | 21        |
| 1.4      | Estabilidad nuclear  | 22        |
| 1.4.1    | Spin nuclear y paridad                                     | 23        |
| 1.4.2    | Estados excitados del núcleo                               | 24        |
| 1.5      | Propiedades electromagnéticas del núcleo. Tamaños y formas | 25        |
| 1.6      | Ecuación de estado nuclear (EOS)                           | 28        |
| 1.6.1    | Recapitulación   | 30        |
| <b>2</b> | <b>Potencial entre dos nucleones</b>                       | <b>33</b> |
| 2.1      | El deuterón  | 34        |
| 2.1.1    | Función de onda y otras características                    | 35        |
| 2.1.2    | Momento magnético y cuadrupolar eléctrico                  | 37        |
| 2.2      | Isoespín   | 38        |
| 2.3      | Función de onda de uno y dos nucleones                     | 39        |
| 2.4      | Vías para obtener información sobre el potencial nuclear   | 40        |
| 2.4.1    | Simetrías e interacción nuclear                            | 41        |
| 2.4.2    | Construcción del potencial nuclear                         | 44        |
| 2.4.3    | Determinación del potencial por vía teórica                | 45        |
| 2.4.4    | Vía experimental: scattering nucleón-nucleón               | 48        |
| 2.5      | Sentido físico y utilidad de la solución                   | 50        |
| 2.5.1    | Sección eficaz de scattering para $\ell = 0$               | 51        |
| 2.5.2    | Amplitud de la onda difundida                              | 52        |
| 2.5.3    | Dependencia de $\sigma$ respecto del spin                  | 54        |
| 2.5.4    | Longitud de scattering y alcance efectivo                  | 54        |



# Unidades y constantes útiles

$$\hbar c \approx 197.3 \text{ MeV fm}$$

$$1 \text{ MeV} \implies 10^{10} \text{ K}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \text{ (cte. de estructura fina)}$$

$$R(\text{fm}) \approx 1.2A^{1/3} \text{ (radio nuclear)}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 1.44 \text{ MeV fm}$$

$$m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 938 \text{ MeV c}^{-2}$$

$$c \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ fm s}^{-2}$$

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx 0.5 \text{ MeV c}^{-2}$$



# Capítulo 1

## Propiedades globales del núcleo

### 1.1 Introducción

Un núcleo atómico viene caracterizado por el número total de cargas positivas (protones) que contiene y por el número total de *componentes* (partículas) del que consta. Aquí, se define el *número atómico*  $Z$  como el número de protones que hay en el núcleo, y el *número másico*  $A$  como el número de componentes que hay en el núcleo, y que será igual al número de protones más el número de neutrones. En general, para núcleos con  $A$  pequeño el número de neutrones es igual al de protones, aunque para núcleos más grandes (con  $A$  grande) el número de neutrones es mayor, incluso en un factor dos o más, que el de protones.

En general, en lo que sigue se denominará **nucleones** a estos *componentes* del núcleo, que serán tanto protones como neutrones, y se considerarán análogos ya que ambos tienen unas masas prácticamente iguales e interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte de igual manera, como veremos posteriormente.

#### 1.1.1 Órdenes de magnitud y unidades

Para comenzar a hacernos una idea sobre la física nuclear, conviene establecer unos órdenes de magnitud acerca de las magnitudes que se suelen obtener aquí:

- El tamaño del núcleo atómico es  $\approx 10^{-13}$  cm (1 fm =  $10^{-15}$  m).
- La fuerza nuclear fuerte que predomina en la interacción entre nucleones tiene un alcance de  $\sim$  fm.
- La densidad nuclear es  $\approx 3 \cdot 10^{14}$  g cm $^{-3}$  (recordemos que el agua líquida tiene una densidad  $\approx 1$  g cm $^{-3}$ . Y en estrellas de neutrones se puede alcanzar densidades de hasta  $\approx 10^{15}$  g cm $^{-3}$ ).
- Para los núcleos radiactivos (i.e. los que no son estables y con el tiempo decaen, se desintegran, en otros núcleos más ligeros), se obtienen diferentes tiempos de desintegración, siendo éstos del orden de  $\sim 10^{-20}$  s para desintegraciones de fisión nuclear; desde minutos hasta millones de años para desintegraciones  $\alpha$  ó  $\beta$ , y de  $10^{-9} - 10^{-12}$  s para desintegraciones  $\gamma$ .

- Los órdenes de energía y masas con que se trabaja en el núcleo son del orden de  $1 - 10$  MeV. Por ejemplo, para arrancar un nucleón del núcleo, se requiere una energía  $\sim 8$  MeV.

### 1.1.2 Constituyentes del núcleo

En general, un núcleo se representará como  ${}^A_Z X_N$ , donde  $X$  es el elemento,  $Z$  el número de protones,  $N$  el número de neutrones y  $A$  el número másico (número de neutrones + protones). Y en función de estos números se pueden establecer tres grupos o familias de núcleos:

**Isótopos.** Un conjunto de núcleos diferentes que tienen el mismo número atómico  $Z$ . En este caso se habla siempre, por tanto, de un mismo “*elemento*” (hidrógeno, oxígeno ...). Un ejemplo podrían ser los núcleos  ${}^{235}\text{U}$  y  ${}^{238}\text{U}$ .

**Isóbaros.** Si la característica que comparten es el número másico  $A$ .

**Isótonos.** Cuando tienen el mismo número de neutrones  $N$ , como por ejemplo  ${}^2\text{H}$  (deuterio) y  ${}^3\text{He}$ .

Por otro lado, aunque en el núcleo se suele tratar con los nucleones como las partículas elementales de éste, estas partículas a su vez están compuestas de otras, los *quarks*.

En general, se hace una primera distinción entre las partículas que tienen spin entero y que, por tanto, no obedecen al principio de exclusión de Pauli, las cuales se denominan *bosones* y las que tienen un spin semientero y sí obedecen dicho principio, recibiendo el nombre de *fermiones*.

**Bosones.** Este grupo alberga a las partículas con spin entero, y está constituido principalmente por

- Fotón ( $\gamma$ ).  $m = 0, Q = 0, S = 1$ , donde  $m$  es la masa,  $Q$  la carga y  $S$  el spin.
- Bosones ( $W^\pm, Z^0$ ).  $m = \{80, 91\} \text{ GeV } c^{-2}, Q = \{\pm 1, 0\}, S = \{1\}$
- Gluón ( $g$ ).  $m = 0, Q = 0, S = 1$ .

Los fotones interactúan únicamente mediante la fuerza electromagnética, mientras que los bosones lo hacen mediante la fuerza débil y el gluón por la fuerte. En este grupo también estaría el *bosón de Higgs*, única partícula predicha por el Modelo Estándar de Partículas que todavía no ha sido observada.

**Fermiones.** En este grupo, que contiene todas las partículas con spin semientero, como el electrón o el protón (aunque éste no es *elemental*). Teniendo en cuenta únicamente las partículas elementales, tenemos dos subgrupos: los quarks y los leptones, donde éstos últimos se diferencian en que pueden existir aislados (como el electrón), mientras que los quarks siempre se encuentran en parejas.

- **Quarks.** Hay seis quarks diferentes:  $u$  up,  $d$  down,  $c$  charm,  $s$  strange,  $t$  top y  $b$  bottom. De los cuales prácticamente solo se encuentra en la Naturaleza el  $u$  y el  $d$ .

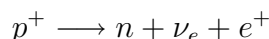
A todas las partículas que están compuestas por *quarks*, como los protones o neutrones, se les denomina *hadrones*.



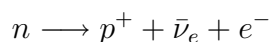
- 
- **Leptones.** Este grupo contiene al electrón  $e$ , al muón  $\mu$  y al tauón  $\tau$ , así como a los tres neutrinos (el electrónico  $\nu_e$ , el muónico  $\nu_\mu$  y el tauónico  $\nu_\tau$ ). Los neutrinos tienen carga nula, con una masa prácticamente nula, mientras que los otros tres tienen una carga igual a la del electrón.

Todas estas partículas sufren únicamente tres tipos de interacciones: la *fuerte*, la *electromagnética* y la *débil* (unificadas en la *electrodébil*), y la *gravitatoria*. Si realizamos una comparación de sus intensidades, tomando como referencia la fuerte = 1, obtenemos que la electromagnética sería  $10^{-3}$ , la débil  $10^{-5}$  y la gravitatoria  $10^{-38}$ .

Como dato importante, decir que la interacción fuerte tiene lugar mediante el intercambio de un pión,  $\Pi$ , mientras que la débil intercambia bosones (y la electromagnética fotones). Y los protones, siempre que estén dentro del núcleo, pueden desintegrarse mediante un  $\beta$  *decay* (*decaimiento beta*) dando lugar a



lo que produciría que un núcleo pasase a tener un protón menos, pero con el mismo número  $A$ , ya que aunque hay un protón menos, ahora hay un neutrón más. Y por otro lado, los neutrones se desintegran en tiempos  $\approx 10$  min si están libres, dando lugar a



donde  $e^+$  indica un positrón y un  $\bar{\nu}_e$  es un antineutrino electrónico.

## 1.2 Descripción del núcleo como un sistema cuántico

Los nucleones del núcleo no se comportan como partículas clásicas, sino que el *carácter cuántico* de éstos es quien determina las propiedades del núcleo. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con otros sistemas cuánticos, para el núcleo no se conoce bien su función de ondas, lo cual hace que se requieran otras formas para poder describir al propio núcleo. Dado que, como cualquier otro sistema, se puede interactuar con él para medir determinadas propiedades, se puede extraer una descripción de éste por medio de los valores obtenidos al medir varios observables, como pueden ser el spin  $J$ , la paridad  $\Pi$  ó el isospin  $I$ .

Entre las propiedades de los núcleos cabe destacar que se puede diferenciar dos grupos importantes: las propiedades estáticas y las dinámicas. Las primeras son las propiedades que no varían con el tiempo para un núcleo aislado (que no interactúa con elementos de su entorno), y aquí podemos encontrar:

- |          |   |
|----------|---|
| - Carga  | - Energía de ligadura                                     |
| - Tamaño | - Spin, paridad $\equiv J^\Pi$ (Spin <sup>Paridad</sup> ) |
| - Forma  | - Momentos electromagnéticos                              |
| - Masa   | - etc   |

## 1.2. Descripción del núcleo como un sistema cuántico

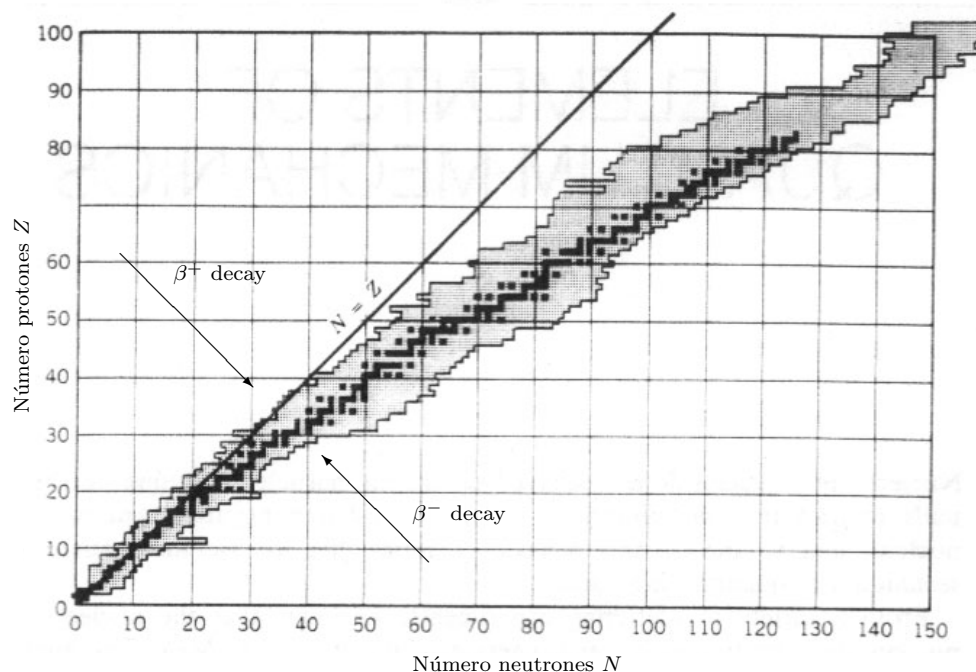


Figura 1.1: Se muestran los núcleos estables en negro, mientras que en gris se pueden ver los núcleos radiactivos conocidos. Se observa cómo para átomos ligeros (bajo  $A$ )  $Z \approx N$ , pero para núcleos pesados  $N > Z$ . Los hipotéticos núcleos que ocuparían la región en blanco son imposibles de formar. A su vez, esta región de estabilidad termina para  $Z \sim 110$ , a partir del cual no se obtienen núcleos estables, aunque se piensa que mas allá debe de haber una *isla* en la que de nuevo haya algunos núcleos estables.

mientras que entre las propiedades dinámicas podemos encontrar:

- Radiactividad
- Reacciones nucleares
- Estados excitados

los cuales al cabo de un cierto tiempo producirán que las propiedades del núcleo examinado cambien.

Por otro lado, para núcleos medios, debido al elevado número de nucleones que contienen, existe un inmenso número de posibilidades ( $\sim 50!$ ) para dichas partículas, lo que hace que aunque supiéramos la función de onda exacta del núcleo, podría llegar a ser imposible obtener información de ésta, puesto que alberga una inmensa cantidad de datos, haciendo muy complicado el calcular algo concreto.

### 1.2.1 Regla de oro de Fermi [\[Wikipedia\]](#)

La regla de oro de Fermi es un método empleado en *teoría de perturbaciones* para calcular la probabilidad de transición (i.e. la probabilidad de que se produzca una transición dada por unidad de tiempo) entre dos estados de energía dados (un estado inicial concreto y un conjunto de estados finales).

### 1.2.1. Regla de oro de Fermi

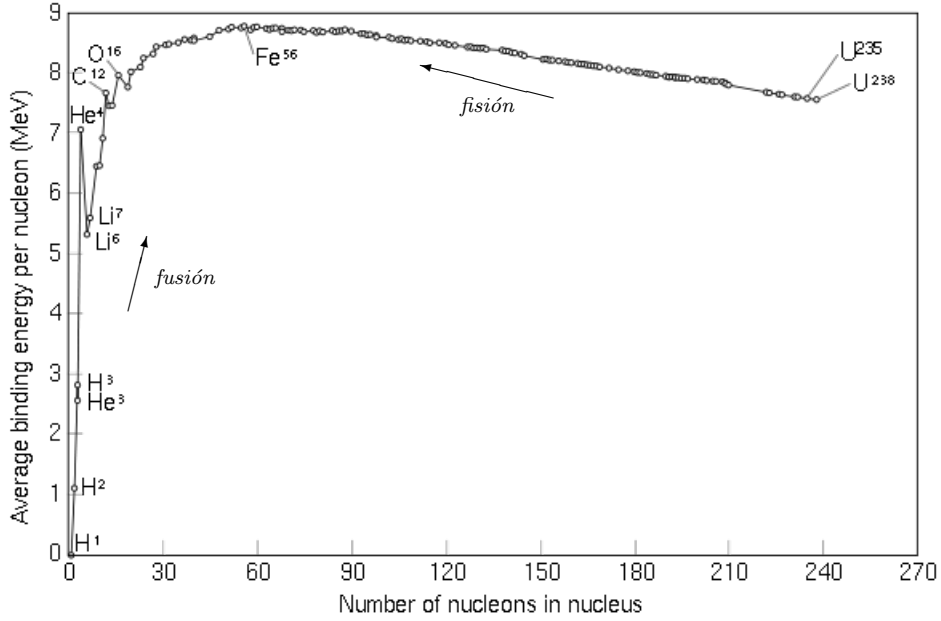


Figura 1.2: Representación de la energía por nucleón en función del número de nucleones presentes en un determinado núcleo. Se observa cómo el elemento con una mayor energía, y por tanto más estable, corresponde al Fe. A su vez, esta relación muestra que se puede establecer que  $B/A \approx cte \approx 8$  MeV en función de  $A$ , cometiendo con esto un error inferior a un 10% .

Si se tiene un sistema que puede describirse por un Hamiltoniano de la forma  $H = H_0 + H_1$ , donde  $H_0$  es un hamiltoniano conocido (no perturbado) y  $H_1$  es una perturbación, cumpliendo que  $H_1 \ll H_0$  para que el estado tenga una desviación pequeña respecto del estado sin perturbar, y se quiere obtener la probabilidad de que ocurra una transición entre un estado inicial  $\psi_i$  hasta un conjunto de estados finales  $\phi_f$ , la *regla de oro de Fermi* nos dice que esta probabilidad de transición viene determinada por

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (1.1)$$

donde  $\rho(E_f)$  es la densidad de estados finales (i.e. la cantidad de estados por unidad de energía que se consideran) y  $V_{fi}$  es el elemento de matriz de la *matriz de transición*, que viene dado por

$$V_{fi} \equiv \int \phi_f^* H_1 \psi_i d^3r = \langle f | H_1 | i \rangle$$

Por supuesto, si no hay perturbación o si los elementos de matriz que conectan los estados iniciales y finales son nulos, no se podrá producir una transición entre ambos estados, resultando la probabilidad nula. Y a su vez, restringiendo el número de estados finales que se quieren obtener, la probabilidad de transición se podrá hacer más pequeña (puesto que a menor número de estados finales, menor probabilidad de que el sistema haya acabado en alguno de ellos).

### 1.2.2 Distribución de carga y de materia

Para conocer cómo es el núcleo atómico se suelen emplear dos métodos diferentes, basados en la interacción que sufren las partículas al pasar cerca de un núcleo.

**Experimento de Rutherford.** Al igual que hizo Rutherford en su experimento original para obtener la distribución del átomo, se puede bombardear una muestra (en general Au) con partículas  $\alpha$  suficientemente energéticas para que consigan acercarse o incluso entrar al núcleo. En este tipo de colisión se tendrá una interacción electromagnética (dado que tanto las partículas  $\alpha$  como el núcleo tienen cargas positivas) pero en ocasiones también se tendrá una interacción fuerte, siempre que las partículas  $\alpha$  consigan entrar al núcleo.

**Difusión de electrones.** Este método consiste en hacer incidir sobre el núcleo electrones suficientemente energéticos para que nos den información de la distribución de carga existente en el núcleo. Como los  $e^-$  solo interactúan por la fuerza electromagnética, ésta será la única interacción existente en esta difusión, por lo que la información que podamos sacar de ella será únicamente la de la distribución de carga eléctrica que hay dentro del núcleo.

En realidad, la potencia de este último método es que conociendo únicamente la distribución de carga podemos extraer también una gran información acerca de la distribución de masa del núcleo, ya que como en éste prevalece la fuerza nuclear fuerte (i.e. prácticamente los nucleones sólo interactúan mediante ésta, pues es unas 1000 veces más fuerte que la electromagnética), las interacciones electromagnéticas entre los protones son despreciables, lo que causa que la distribución de los protones sea similar a la de los neutrones (ya que ambos tienen la misma interacción). Así que sabiendo la distribución de los protones (la cual determinamos a través de la carga), conocemos automáticamente la distribución de los neutrones.

Siguiendo con la difusión de electrones, puesto que para explorar un objeto de un tamaño dado se requiere un proyectil que tenga una longitud de onda del mismo orden, esto nos impone la energía mínima que deben tener los electrones para darnos información del núcleo. Puesto que el tamaño del núcleo es  $\sim 10$  fm, se requiere una longitud de onda de dicho orden o menor, lo que nos impone un momento para los electrones de  $p \gtrsim 100$  MeV  $c^{-1}$ .

Para el estudio de la difusión, se considera que el núcleo permanece en todo momento en reposo, puesto que  $m_N \gg m_e$ . De esta forma, si los electrones incidentes se asemejan a una onda plana que incide sobre el núcleo, es decir el haz incidente llega prácticamente paralelo hasta que se encuentra con el núcleo, un electrón que incidiera con un momento inicial  $\vec{k}_i$ , habrá sido difundido acabando con un momento final  $\vec{k}_f$ .

Dado que la colisión es elástica, se tendrá que cumplir que  $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f|$ , luego solo habrá variación en el giro, y al ser una onda plana, los estados inicial y final vendrán dados por

$$\psi_i = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \rightsquigarrow \quad \psi_f = e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$$

### 1.2.2. Distribución de carga y de materia

Como hemos visto en §1.2.1, el elemento de matriz de la transición estudiada vendrá dado por

$$V_{fi} = \int \psi_f^* V \psi_i dv$$

con  $V$  la interacción entre el  $e^-$  y el núcleo. Por tanto, la probabilidad de que se produzca la transición será

$$W \propto |F(\vec{k}_i, \vec{k}_f)|^2 = |V_{fi}|^2 \quad (1.2)$$

de donde se define el **factor de forma** como

$$F(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) dv \quad (1.3)$$

donde  $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$  y  $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \sin \theta$ .

Y por tanto la sección eficaz resultante para los electrones difundidos a un determinado ángulo  $\theta$  será

$$\sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim W$$

que se puede poner como una sección eficaz debida a un núcleo puntual por un factor (el factor de forma):

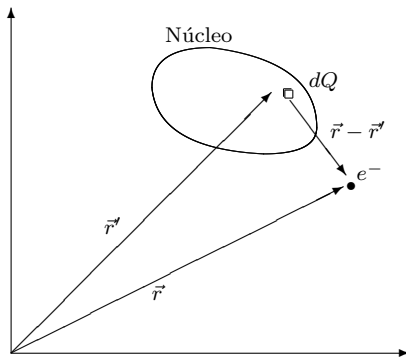
$$\sigma(\theta) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntual}} \cdot |F(q)|^2 \quad (1.4)$$

donde vemos que si el núcleo realmente fuera puntual  $\Rightarrow F(q) = 1$ , por lo que dicho *factor de forma* contiene la información de la distribución de carga del objeto.

---

**Cuestión 1.** La sección eficaz  $\sigma(\theta)$ , ecuación (1.4), depende del ángulo de scattering  $\theta$ , pero en el otro lado de la igualdad tenemos  $F = F(q)$ , por lo que se debe tener que  $q = q(\theta)$ . Encontrar dicha relación de  $\vec{q}$  en función del ángulo  $\theta$ .

---



Hemos dicho que el electrón únicamente siente la interacción electromagnética, por lo que el potencial  $V$  vendrá dado exclusivamente por dicha interacción del  $e^-$  con el núcleo. Suponiendo que éste se puede modelar mediante una densidad de carga  $\rho_c(r')$ , el potencial que verá un electrón a una distancia  $\vec{r} - \vec{r}'$  de un elemento de carga  $dv'$  será

$$dV = -\frac{edQ}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{Ze^2\rho_c(r')dv'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.5)$$

siendo  $Ze\rho_c(r')$  la *densidad de carga nuclear*, que es precisamente lo que queremos obtener. Extendiendo a toda la distribución de carga del núcleo obtenemos que

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_c(r')dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.6)$$

## 1.2. Descripción del núcleo como un sistema cuántico

---

por lo que la ecuación (1.3) se puede poner de la forma

$$F(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_c(r') dv' \quad (1.7)$$

donde se ha normalizado dicha función (prescindiendo de las constantes que salen).

---

---

**Cuestión 2.**  *Demostrar que se puede pasar de la ecuación (1.3) a la (1.7).  
Ayuda: utilizar para ello la ecuación de Poisson, y el teorema de Green.*

---

---

---

---

**Cuestión 3.**  *Demostrar a su vez que si se tiene una simetría esférica, se puede poner*

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \sin(qr') \rho_c(r') r' dr'$$

---

---

Un modelo común que se suele utilizar para la densidad nuclear utiliza una relación de la forma

$$\rho_c(r) = \frac{(1 + Wr^2/c^2)}{1 + \exp(\frac{r-a}{a})} \rho_0$$

que se denomina *función de Fermi a 3 parámetros*, donde  $W$  suele ser una cantidad pequeña. En ocasiones este término se suele despreciar, por lo que se reduce a dos parámetros únicamente.

Esto nos lleva a obtener una distribución similar a la que observamos en la Figura 1.3, por lo que dentro del núcleo obtenemos una densidad aproximadamente constante, y en el borde ésta cae suavemente. Dicha forma es cualitativamente la misma para todos los núcleos, y únicamente varía el radio del núcleo y ligeramente el valor de la densidad.

Si en lugar de utilizar el método de difusión de electrones, se realiza un experimento de Rutherford con partículas  $\alpha$ , el cual sí nos da directamente la distribución de materia del núcleo, podemos comparar los resultados de ambos métodos, obteniendo que la distribución de carga y de materia es muy similar y que el radio nuclear va como  $R \sim A^{1/3}$ .

---

---

**Cuestión 4.**  *Relacionar la densidad de carga nuclear con la interacción entre nucleones.*

---

---

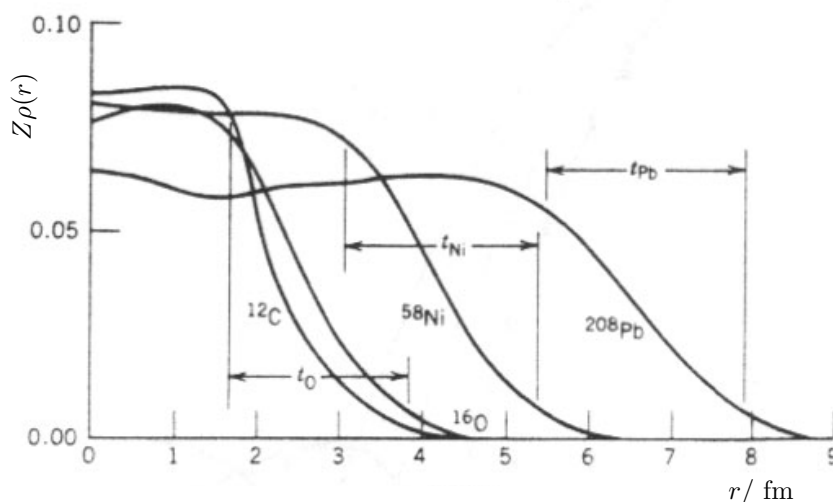


Figura 1.3: Distribución de la densidad de carga nuclear en función de la distancia al centro del núcleo para 4 elementos diferentes. Se observa como dentro de éste la densidad siempre es prácticamente constante, y en el borde cae suavemente, con una caída de distancia  $t$  que es prácticamente la misma para todos los elementos y  $\approx 2.3$  fm. Y cualitativamente todos los núcleos tienen la misma distribución de densidad.

### 1.3 Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas

Las Figuras 1.2 y 1.1 sobre la energía por nucleón en función de  $A$  y del número de neutrones en función del de protones para cada átomo estable hacen que surjan una serie de cuestiones a responder. Como por ejemplo por qué se tiene  $Z \sim N$  para núcleos ligeros, o por qué no hay núcleos estables más allá de  $A \sim 209$ . A su vez, también hace falta entender cuales son los mecanismos que producen las desviaciones de  $E = cte$  para cualquier  $A$ .

Para ver qué mecanismos entran en juego en estas descripciones hace falta establecer la energía que contiene el núcleo. Y ésta, será igual a la suma de las energías que tiene cada partícula ( $Z$  protones y  $N$  neutrones) a lo que habrá que restar un término debido a que en el núcleo estos nucleones se encuentran bajo un potencial de interacción, lo que hace que tengan una energía menor que si estuvieran aislados (como partícula libre). De esta forma, podemos poner

$$E_N \equiv M(Z, A)c^2 = ZM_p c^2 + NM_n c^2 - B \quad (1.8)$$

donde se ha utilizado la relación relativista de que la energía de un cuerpo es  $E = mc^2$ , y  $B$  es la **energía de ligadura**, que es la energía necesaria para separar al núcleo en  $Z$  protones y  $N$  neutrones (i.e. es la barrera de potencial que hace que el núcleo se mantenga ligado).

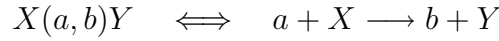
Ahora bien, de la ecuación anterior, haciendo la equivalencia de energía en masa  $E_N = M(Z, A)c^2$ , se puede obtener la masa *equivalente* que tendría el núcleo debido a su energía. Y como se cumplirá que  $M(Z, A) < ZM_p + NM_n$ , es equivalente a decir que hay

### 1.3. Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas

---

un defecto (o pérdida) de masa al formarse el núcleo. Es decir, la masa total del núcleo es inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo componen.

Esto nos permite calcular la energía que se libera o requiere al producirse una reacción nuclear. Representando ésta por



donde  $a$  es la partícula incidente,  $b$  la partícula final y  $X$  e  $Y$  representan al núcleo en sus estados inicial y final (y que de representan por letras distintas pues el núcleo ha podido un cambio tal que se haya convertido en otro elemento diferente). De aquí, podemos definir un valor  $Q$  llamado **calor de reacción**

$$Q = (m_i - m_f)c^2 = (m_X + m_a - m_Y - m_b)c^2 \quad (1.9)$$

o análogamente

$$Q = T_f - T_i = T_Y + T_b - T_X - T_a \quad (1.10)$$

---

---

**Cuestión 5.** Si comparamos las dos expresiones para el calor de reacción (1.9) y (1.10) podemos observar que en la primera tenemos  $m_i - m_f$ , mientras que en la segunda es  $T_f - T_i$ . ¿Por qué esta variación es al revés en las dos?. Es decir *final - inicial* en una e *inicial - final* en la otra.

---

---

De estas relaciones observamos que  $Q$  puede tomar tanto valores positivos como negativos, lo cual definirá el tipo de reacción que ha tenido lugar y que es el fundamento de las reacciones de fusión y fisión nuclear:

$$Q \begin{cases} > 0 \implies m_i > m_f \wedge T_f > T_i \rightsquigarrow \text{exotérmica} \\ < 0 \implies m_i < m_f \wedge T_f < T_i \rightsquigarrow \text{endotérmica} \end{cases}$$

es decir, se pierde energía de ligadura a costa de perder energía cinética o al revés, de forma que cualquier cambio en  $T$  se equilibra con un cambio equivalente en  $m$ , por medio de  $E = mc^2$ . Así, en una reacción exotérmica la  $E$  de ligadura se libera como  $E$  cinética en los productos finales, mientras que en una endotérmica es la  $E$  cinética la que se convierte en  $E$  de ligadura ó masa.

#### 1.3.1 Modelo de la gota líquida y fórmula semiempírica de masas

Hemos visto que el núcleo está constituido por un número  $A$  de nucleones. Pero dada las características de éste, se puede contemplar un modelo en el que se le describe como una gota líquida, en la que los nucleones se comportan de forma similar a las moléculas de esta gota. Esto se hace partiendo de los hechos de que la densidad dentro del núcleo es  $\approx cte$ , al igual que la energía de ligadura por nucleón ( $B/A$ ).

Usando el análogo clásico, la energía que alberga una gota líquida viene descrita por dos términos. El primero, *an*, es el *término de volumen*, que nos da idea de la cohesión



que hay entre las partículas, y al que hay que añadir un segundo término,  $\beta n^{2/3}$ , que es el *término de superficie* y que da cuenta de que las moléculas localizadas en la superficie de la gota no “ven” lo mismo que las interiores, pues éstas por el lado interno ven la interacción con las otras partículas mientras que por el lado externo ven el vacío (fuera de la gota). De esta forma se puede escribir

$$E = B = an - \beta n^{2/3} \quad (1.11)$$

donde  $n$  es el número de moléculas de la gota y  $a, \beta$  son constantes. De aquí se puede extraer que cuanto mayor superficie, menor es la energía de ligadura del núcleo.

Pasando al núcleo, aquí sabemos que la densidad tiene que ser proporcional a  $A$  (puesto que  $\rho = m/v$  y  $m \propto A$ ), y que a su vez la densidad en el núcleo se mantiene constante, lo cual implica que la densidad debe tener en el denominador *algo* proporcional a  $A$  de tal forma que cancele esa proporcionalidad. Es decir  $\rho \sim A/A$  para que ésta sea constante con independencia de  $A$ . Suponiendo que el núcleo es esférico, con un *radio efectivo*  $r_0$  dado, tendremos que

$$\rho \sim \frac{m}{v} \sim \frac{A}{4\pi r_0^3 A} = cte$$

por lo que se puede establecer que el *radio nuclear* es de la forma

$$R \sim r_0 A^{1/3} \quad (1.12)$$

Por otro lado, por la Figura 1.2 sabemos que a primera aproximación se cumple que  $B/A \approx cte$ , por lo que  $B \propto A$ . Esto radica fundamentalmente en que la fuerza nuclear fuerte es de corto alcance (unos femtómetros), lo que hace que cada nucleón únicamente *sienta* a los nucleones que tiene cerca. Así, todos los nucleones ven aproximadamente lo mismo y por tanto sufren la misma fuerza.

Si además las partículas tienen carga eléctrica, hay que añadir otro término debido a esta interacción, por lo que

$$B = an - \beta b^{2/3} - \gamma \frac{Q^2}{n^{1/3}} \quad (1.13)$$

Ahora llevamos esta analogía al núcleo, con ciertas suposiciones:

- El núcleo es esférico o prácticamente esférico.
- Los nucleones se comportan de igual forma que las moléculas en el líquido: fuerzas de corto alcance que son atractivas, y repulsivas a pequeñas distancias.
- La densidad nuclear es prácticamente constante en todo el núcleo.

De esta forma, podemos convertir directamente  $n \rightsquigarrow A$  y  $Q \rightsquigarrow Z$ , con lo que nos queda que la energía de ligadura es

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (1.14)$$

que tiene los términos de volumen, superficie y de Coulomb, respectivamente. En esta última, estrictamente se debería poner  $Z(Z - 1)$  en lugar de  $Z^2$ , ya que dado un protón, éste siente a los  $Z - 1$  protones restantes, pero ésta es una aproximación que se suele emplear frecuentemente.

**Cuestión 6.** Esta expresión (1.14) aplicada al núcleo atómico da una predicción totalmente errónea respecto a la abundancia de determinados isótopos, por lo que es incompleta. ¿Cuál es esta predicción?

### 1.3.2 Término de asimetría

Hemos visto cómo a nuestro anterior modelo de la gota líquida le hace falta, cuanto menos, algunos términos más para poder dar una descripción factible del núcleo atómico. Por ello, en estas dos secciones se va a razonar la introducción de dos términos adicionales a la fórmula semiempírica de masas (1.14).

Aquí modelaremos al núcleo atómico como una mezcla de dos gases de Fermi, uno formado por los protones y otro por los neutrones. Como ambas partículas son fermiones, es decir tienen spin semientero y por tanto obedecen el principio de exclusión de Pauli, se dispondrán en diferentes niveles de energía (al ser un sistema ligado, la Mecánica Cuántica nos dice que los niveles posibles de energía son discretos, no es un continuo), de forma que se completarán los niveles más bajos, hasta llegar al *nivel de Fermi*, que vendrá definido como el nivel más alto ocupado. Esto se produce tanto para los protones como para los neutrones (al considerarlos como una mezcla, podemos definir unos niveles diferentes para cada gas).

Recordando los primeros capítulos, vimos que el protón no es totalmente estable, sino que puede desintegrarse convirtiéndose en un neutrón (más otras partículas adicionales), en lo que se conoce como *desintegración  $\beta$* . Sin embargo, esta transformación requerirá una energía determinada, que pasamos a determinar ahora:

En esta desintegración, el número másico  $A$  se mantendrá constante, ya que por cada protón que se desintegra aparece un nuevo neutrón. Suponiendo un modelo simple de Fermi, en el que todos los niveles de energía están igualmente espaciados con una separación  $\Delta E$ , se tendrá que para un protón que estuviera en el nivel de Fermi (con energía  $E_F$ ), se habrá pasado a un neutrón que se localizará en el nivel  $E_F + \Delta E$ , puesto que todos los anteriores ya están ocupados por neutrones (ver Figura 1.4). Así, netamente se habrá producido un aumento neto de energía de valor  $\Delta E$ .

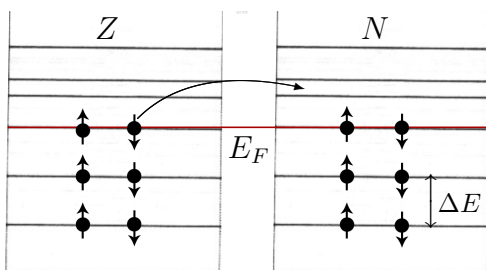


Figura 1.4: Niveles de energía para las dos partículas y paso de un protón a neutrón.

Si se vuelve a convertir un protón en un neutrón, este protón, que está en el nivel  $E_F$  también pasará a un neutrón que también ocupará el nivel  $E_F + \Delta E$ , por lo que ahora el aumento de energía respecto al inicial será de  $2\Delta E$ . Pero para los siguientes el aumento es mayor puesto que el protón “saltará” de un nivel  $E_F - \Delta E$  a un neutrón en el nivel  $E_F + 2\Delta E$  (un aumento de energía de  $3\Delta E$ , que sumadas a las anteriores dará un aumento neto de  $5\Delta E$ ).

De esta forma podemos poner la relación, tomando que como en cada desintegración

### 1.3.3. Término de pairing

---

$$\begin{aligned} N &\rightsquigarrow N + 1 \\ Z &\rightsquigarrow Z - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } N - Z &= 2, 4, 6, 8, 10, \dots \\ \text{aumento } \Delta E &= 1, 2, 5, 8, 13, \dots \end{aligned}$$

esta relación se puede aproximar a que (siempre que se mantenga  $A = cte$  como hemos dicho) se producirá un aumento de la energía de la forma

$$E_{\text{sim}} \approx \frac{1}{8}(N - Z)^2 \Delta E$$

a cuyo término se le denomina **energía de asimetría**, ya que da cuenta de la “asimetría” entre el número de protones y el de nucleones. Dado que el espaciado de niveles de energía en un pozo de potencial es inversamente proporcional al volumen de dicho pozo, y como vimos  $R^3 \sim A$ :

$$E_{\text{sim}} = -a_{\text{sym}} \frac{(Z - N)^2}{A}$$

que como también va con signo negativo, fuerza a que  $Z$  tienda a acercarse a  $N$  en un núcleo. En este término, se puede sustituir  $N$  sabiendo que  $A = N + Z$ , con el fin de dejarlo en función únicamente de  $A$  y de  $Z$ .

### 1.3.3 Término de pairing

De observaciones totalmente experimentales se observa que si se realiza un conteo del número de núcleos que tienen una paridad dada en su número de neutrones y protones (es decir, si el número de protones y el de neutrones es par o impar), se obtiene una distribución como la siguiente:

$$\text{n}^\circ \text{ de protones-neutrones} \begin{cases} \text{par-par} & \sim 180 \text{ núcleos estables} \\ \text{par-impar} & \sim 120 \text{ núcleos estables} \\ \text{impar-impar} & \sim 4 \text{ núcleos: } {}^2\text{He}, {}^6\text{Li}, {}^{10}\text{B}, {}^{11}\text{N} \end{cases}$$

Esto hace pensar que debe haber un término que está provocando que los núcleos con un número par de protones y neutrones sean mucho más estables que los de números impares, lo cual quiere decir que estos núcleos están mucho más ligados, o lo que es lo mismo, que dos protones (o neutrones) están más ligados que si se tiene un protón y un neutrón.

La razón de esto se puede entender teniendo en cuenta el spin de estas partículas, ya que en un núcleo par-par se tiene un spin total  $S = 0$ , lo que hace que los protones (y neutrones) se vayan acoplando de tal forma que van anulando su momento angular, por lo que al final se tiene una menor energía.

Realizando una analogía clásica, si un protón tiene un momento angular  $\uparrow$  (ya sea debida al spin o debida a su “órbita” en el núcleo), al haber un número par, hay otro protón que se dispone con un momento angular  $\downarrow$ , por lo que el momento angular total se cancela, y finalmente no contribuye a la energía.

### 1.3. Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas

Con esto, podemos determinar el término de pairing del núcleo, el cual tendrá tres distinciones: si es un núcleo par-par, impar-impar, ó si  $A$  es impar (i.e. o bien es impar-par ó par-impar), de forma que

$$\delta(Z, A) = \begin{cases} A \text{ impar} & 0 \\ \text{impar-impar} & -a_p/A^{1/2} \\ \text{par-par} & +a_p/A^{1/2} \end{cases}$$

por lo que en esta ocasión se añade un término que no es suave (continuo) sino que es una función a saltos. Juntando todas las contribuciones obtenemos una mejor aproximación de la energía de ligadura:

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta(Z, A) \quad (1.15)$$

y por tanto, ya tenemos la expresión para la **fórmula semiempírica de masas**, definida ya en (1.8):

$$M(Z, A) = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) c^{-2} \quad (1.16)$$

donde en general  $m_p$  (masa del protón) se suele escribir como  $m(^1\text{H})$ .

Ajustando experimentalmente todos estos coeficientes a los núcleos (en general para  $A > 20$ ) se obtienen que sus valores son

$$\begin{aligned} a_v &\sim 15.56 \text{ MeV} & a_s &\sim 17.23 \text{ MeV} \\ a_c &\sim 0.69 \text{ MeV} & a_{\text{sym}} &\sim 23.28 \text{ MeV} \\ & & a_p &\sim 12 \text{ MeV} \end{aligned}$$

En esta fórmula, hay que decir que se han dejado sin tratar varios efectos que también tendrán una contribución en la energía de ligadura del núcleo, como es el efecto de capas (i.e. los efectos que surgen de tener una estructura de niveles de energía), y los efectos gravitatorios debido a la masa de los nucleones.

---

**Cuestión 7.** *Introducir un término adicional que tenga en cuenta la energía gravitatoria del núcleo. Ver qué ocurre cuando dicho término crece. ¿qué predicción se podría hacer sobre las estrellas de neutrones?*

---

De este término de pairing se obtiene que los núcleos con un número impar-impar siempre tienen una contribución extra a la energía de forma que son menos ligados que los par-par. Así, se puede ver en la Figura 1.5 cómo serían estas curvas para diferentes núcleos con  $A = \text{cte}$ . Pero esto nos lleva a un resultado no del todo correcto: puesto que los núcleos con un número impar-impar tienen una menor energía de ligadura, con el paso del tiempo todos decaerían hacia núcleos más estables, esto es, con un número par-par. Sin embargo, como hemos visto sí hay unos pocos núcleos impar-impar estables.

La explicación que se puede dar aquí es que el modelo aplicado se comporta mejor para átomos pesados (con un gran  $A$ ), por lo que para núcleos más ligeros la fórmula semiempírica de masas construida continúa siendo no del todo válida, aunque por lo general sí bastante aproximada como vemos (son muy pocos los átomos impar-impar estables).

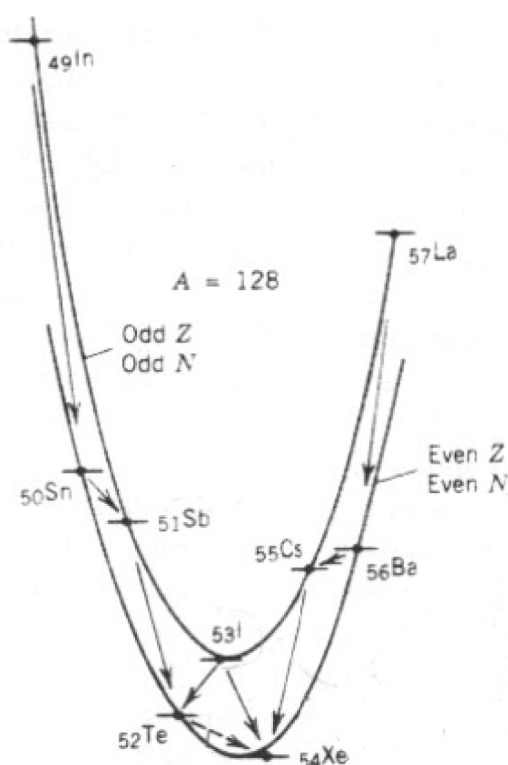


Figura 1.5: Niveles de energía para los núcleos con un número de protones y neutrones par-par ó impar-impar. Se ve cómo los impar-impar siempre tienen mayor energía por lo que en teoría todos deberían desintegrarse con el tiempo a un núcleo par-par (en la Figura, al  ${}_{54}\text{Xe}$ ).

### 1.3.4 Consecuencias de la F.S.M. y limitaciones

A partir de lo visto hasta ahora y de la *fórmula semiempírica de masas* (F.S.M.) se pueden sacar varias conclusiones del núcleo y sus propiedades, así como de las carencias que todavía tiene este modelo:

- Las fuerzas nucleares son de *tipo saturante*, es decir, los nucleones no se pueden disponer indefinidamente en un mismo nivel de energía sino que hay un número para el cual estos niveles “se satura” y no aceptan más nucleones. Esto trae dos consecuencias fundamentales ya vistas:
  - que la densidad en el interior del núcleo es constante:  $\rho = cte$ . Lo que implica que independientemente de  $A$ , la distancia entre partículas es la misma.
  - La energía *total* de ligadura es proporcional a  $A$ , o dicho de otro modo  $B/A = cte$ .

La razón de que ocurra estas propiedades radica en que la fuerza nuclear, que es la fuerza predominante dentro del núcleo, es de corto alcance, por lo que un nucleón no siente al resto de nucleones del núcleo sino únicamente a unos pocos.

A pesar de esto, también debe existir una parte repulsiva entre las fuerzas nucleares, ya que de otro modo todas las partículas tenderían al mínimo de energía y el núcleo colapsaría (hasta ahora como única *fuerza* repulsiva hemos visto el principio de

Pauli, pero este no bastaría para mantener a los nucleones a las distancias nucleares reales). Así pues, realmente habría dos términos repulsivos a tener en cuenta en un modelo del núcleo: el debido al principio de exclusión de Pauli (para nucleones con igual spin) y el debido a la pared repulsiva que tiene la fuerza nuclear fuerte a cortas distancias.

- Por otro lado, aunque ya se ha trabajado con una descripción de niveles (en el término de asimetría) donde se utiliza el principio de exclusión de Pauli, realmente la F.S.M. construida no nos da ninguna información sobre el spin nuclear, el cual por ser un sistema cuántico con partículas con spin no nulo (y de hecho, semientero), dará una contribución importante.
- A su vez, en toda nuestra descripción se ha supuesto que el núcleo atómico es esférico. Algo que aunque es una aproximación razonable, no será del todo exacta pues dicho núcleo está sujeto a fuerzas externas (o internas) que harán que éste se deforme, lo cual contribuirá a la energía de ligadura.
- La ventaja que tiene una descripción de gota líquida para el núcleo es que esta descripción nos permite tratar y analizar la existencia de modos de vibración en el núcleo (algo que resulta imposible o muy complicado de analizar desde el punto de vista de un modelo de capas). En este caso se puede hacer una analogía con la gota líquida “clásica”, por lo que podemos esperar que existan tanto *estados vibracionales* (que serán debidos o producirán ondas estacionarias superficiales) como *estados rotacionales*, los cuales producirán deformaciones en el núcleo.
- Aunque se han introducido algunas correcciones cuánticas a la F.S.M. clásica, éstas solo son dos (el término de asimetría y el de pairing), por lo que es de esperar que para una descripción más precisa haya que considerar un mayor número de correcciones cuánticas.

## 1.4 Estabilidad nuclear

La ventaja de la F.S.M. que hemos construido radica en que con ella se puede entender fácilmente el comportamiento de la energía de ligadura del núcleo en función de  $Z$  y de  $A$ . Para ello, basta con observar dónde (en función de  $A$  y  $Z$ ) tenemos un mínimo de la energía de ligadura partiendo de la F.S.M., con lo que obtendremos los núcleos más estables.

Manteniéndonos en una isobárica (i.e. con  $A = cte$ ) cerca del mínimo podemos aproximar el comportamiento de la energía a una parábola, con lo que obtendríamos que el mínimo se encuentra para

$$Z_{\min} = \frac{[m_n - m(^1\text{H})]c^2 + a_c A^{-1/3} + 4a_{\text{sym}}}{2a_c A^{-1/3} + 8a_{\text{sym}} A^{-1}} \quad (1.17)$$

la cual podemos aproximar por

$$Z_{\min} \approx \frac{1}{2} \frac{A}{1 + \frac{1}{4} A^{2/3} a_c / a_{\text{sym}}} \quad (1.18)$$

### 1.4.1. Spin nuclear y paridad

---

ya que  $m_n \approx m(^1\text{H})$  y  $a_c \sim 0.72$  MeV mientras que  $a_{\text{sym}} \sim 23$  MeV.

---

---

**Cuestión 8.** Deducir la expresión (1.17) a partir de la fórmula semiempírica de masas.

---

---

El conocimiento de la posición de mínima energía nos permite describir la energía por nucleón como un desarrollo en serie centrado en  $Z_{\text{min}}$  de la forma

$$E/A \approx E_0/A + f \cdot (Z - Z_{\text{min}})^2 + \dots, \text{ con } f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} \right)_{A=cte} = \frac{2a_{\text{sym}}}{AZ_{\text{min}}}$$

---

---

**Cuestión 9.** Demostrar que  $f = \frac{2a_{\text{sym}}}{AZ_{\text{min}}}$ .

---

---

por lo que de aquí se obtiene otro método para la determinación de  $a_{\text{sym}}$  estudiando cómo es dicho mínimo de energía. Con este método experimentalmente se obtiene un valor  $a_{\text{sym}} \sim 20$  MeV el cual es similar al obtenido por el otro método (el ajuste que hicimos a la curva de la Figura 1.2 con la fórmula semiempírica de masas).

### 1.4.1 Spin nuclear y paridad

Hasta ahora se ha obviado el *spin nuclear* (o más rigurosamente el momento angular nuclear) en la descripción del núcleo, algo que ha llegado el momento de tratar, junto con otra propiedad: la paridad del núcleo.

En física nuclear, este momento angular total que tiene el núcleo comúnmente suele ser llamado el *spin nuclear*, aunque conviene no confundir dicho término con el spin de cada nucleón o spin total como suma de todos los nucleones, pues ésta solo es una de las dos contribuciones al spin nuclear, la otra es el momento angular de los nucleones (el cual es debido a la “órbita” de éstos). Así, cada nucleón tendrá un momento angular neto que será suma del momento angular orbital y de su spin:

$$\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i$$

donde el subíndice  $i$  representa al  $i$ -ésimo nucleón y dicha suma es una suma vectorial. De esta forma, el spin nuclear será igual a

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i (\vec{\ell}_i + \vec{s}_i)$$

Como cada  $j$  individual es un número semientero, en función del número de nucleones presentes en el núcleo se obtendrá que el  $J$  total será un número entero ó semientero, de tal forma que

$$\begin{aligned} A = \text{impar} &\longrightarrow J = \text{semientero} \\ A = \text{par} &\longrightarrow J = \text{entero} \end{aligned}$$

## Paridad

El operador *paridad* es una operación espacial que fundamentalmente cambia  $\vec{r} \rightsquigarrow -\vec{r}$  y que denotaremos por  $\Pi$ . De esta forma, la transformación que produce será

$$\text{en coord. cartesianas: } \begin{cases} x \rightsquigarrow -x \\ y \rightsquigarrow -y \\ z \rightsquigarrow -z \end{cases} \quad \text{en coord. esféricas: } \begin{cases} r \rightsquigarrow r \\ \theta \rightsquigarrow \pi - \theta \\ \phi \rightsquigarrow \phi + \pi \end{cases}$$

Dado que la función de ondas debe tener paridad bien definida (ser simétrica o anti-simétrica), se deberá cumplir que

$$\Pi\varphi(\vec{r}) = \pm\varphi(\vec{r})$$

y para un sistema con simetría esférica, podremos desarrollarlo en una parte radial y otra angular de forma que

$$\varphi(\vec{r}) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

por lo que dicho operador, ya que deja la coordenada  $r$  invariante, sólo actuará sobre los armónicos esféricos, los cuales pasarán a ser

$$\Pi Y_\ell^m(\theta, \phi) = Y_\ell^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

lo cual nos deja únicamente dos posibilidades en función de que  $\ell$  sea par o impar.

En lo referente a la interacción fuerte, ésta **conserva la paridad** (al igual que ocurre con la interacción electromagnética, pero no con la débil). De esta forma, dada una reacción  $a + b \rightarrow c + d$  en donde la interacción se ha producido por la fuerza fuerte, ya sabemos para empezar que la paridad se debe conservar antes y después de la reacción.

Dado que para un núcleo con  $A$  nucleones, la paridad total viene dada por

$$\Pi = (-1)^{\sum_i \ell_i} \begin{cases} -1 \equiv - & \text{si } A \text{ impar} \\ +1 \equiv + & \text{si } A \text{ par} \end{cases} \quad (1.19)$$

relación que realmente tiene un término multiplicativo  $\Pi_{intr}$  que sería la paridad intrínseca de las partículas, pero como para los nucleones  $\Pi_{intr} = 1$ , se puede prescindir de dicho factor (pero el cual habría que añadir en el caso de no estar tratando con nucleones). De esta forma, dada la reacción anterior podemos establecer que se debe cumplir la igualdad

$$\Pi_a \Pi_b (-1)^{\ell_{ab}} = \Pi_c \Pi_d (-1)^{\ell_{cd}}$$

donde los  $\Pi_i$  con  $i = \{a, b, c, d\}$  son las paridades intrínsecas de los diferentes partículas, y los  $\ell_{ab}$  y  $\ell_{cd}$  están asociados a los movimientos orbitales de las mismas.

### 1.4.2 Estados excitados del núcleo

Dado que el núcleo es un sistema que consta de niveles de energía discreto, tendremos que los diferentes nucleones podrán situarse en estados excitados, produciéndose transiciones entre éstos, al igual que ocurre en los niveles electrónicos. En este caso, a altos



niveles se tiene que éstos son más anchos, es decir, hay una superposición de varios estados con energías muy próximas generándose algo similar a una “banda” de energía como ocurre en un sólido cristalino. Y dado que la precisión en la energía está menos definida (por ser una banda en lugar de una línea bien definida), por el principio de incertidumbre conocemos que esto provoca que el tiempo asociado a dicho estado sea menor (el cual es aproximadamente infinito para estados “bajos”: es decir, son estados estacionarios), por lo que estos niveles más altos son inestables.

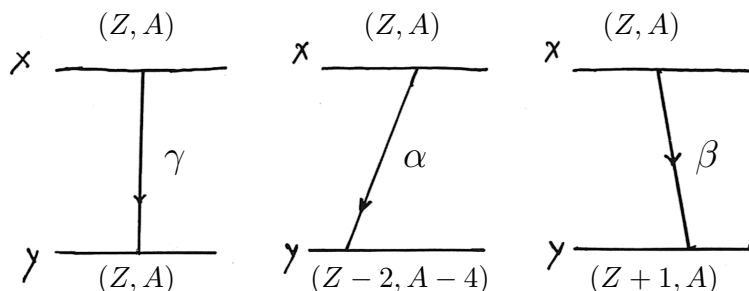
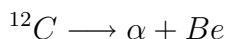


Figura 1.6: Desexcitaciones entre dos niveles de un núcleo  $X$  que pasa a  $Y$ . Si se emite un fotón  $\gamma$ , el núcleo sigue siendo el mismo (solo que con menor energía). Pero si se emite una partícula  $\alpha$ , el núcleo pasará a ser otro diferente, con 2 protones y 4 nucleones menos respecto del inicial. Y en un decay  $\beta$ , el núcleo ganará un protón perdiendo un neutrón, ya que este último se habrá transformado mediante  $n \rightarrow p^+ + \nu_e + e^-$ .

En este caso, las desexcitaciones pueden producirse por tres fenómenos distintos: emisión de un fotón  $\gamma$ , emisión de una partícula  $\alpha$ , ó por un decay  $\beta$ .

Por ejemplo, en el  $^{12}\text{C}$  (cuyos primeros niveles, con  $J = 0, 2, \dots$  tienen energías de 0, 4.4, 7.6,  $\dots$  MeV, donde se ha establecido el origen en el nivel fundamental) al decaer desde el nivel de 7.6 MeV se emite una partícula  $\alpha$  y dicho núcleo pasa a ser Be:



Por último, detallar que los niveles energéticos del núcleo se suelen dividir en 3 grupos o capas, que tienen la misma naturaleza que en el átomo: el core, al que pertenecen todas las capas que están llenas; las capas de valencia, las cuales están semillenas, y a las que pertenecen los nucleones que suelen ser excitados a los niveles superiores; (los estados excitados), los cuales forman la capa que en condiciones de equilibrio estaría vacía. Por supuesto, en ocasiones también se puede excitar algún nucleón del core (de las capas llenas), generalmente mediante vibraciones del núcleo u otros procesos.

## 1.5 Propiedades electromagnéticas del núcleo.

### Tamaños y formas

Hasta este momento siempre se ha supuesto que el núcleo tiene una forma esférica, sin embargo esto no deja de ser una aproximación, por lo que resulta necesario conocer qué forma geométrica tiene el núcleo realmente.

## 1.5. Propiedades electromagnéticas del núcleo. Tamaños y formas

Para empezar, dado que la interacción fuerte (la que impera dentro del núcleo) conserva la paridad, esto ya impone ciertas restricciones a la geometría que pueda tener el núcleo (ya que esta geometría debe conservar esta simetría).

Partiendo desde un punto de vista clásico, podemos modelar el núcleo como un conjunto de cargas y corrientes (es decir,  $\rho$  y  $\vec{J}$ ). Así que sometiénolo a un campo eléctrico externo se puede obtener información sobre su forma geométrica, ya que este campo interactuará con estas cargas y corrientes dándonos una respuesta que puede ser observada. Esto siempre y cuando el  $\vec{E}$  aplicado sea suficientemente débil como para no perturbar al núcleo (i.e. su geometría) y ser aproximadamente constante dentro del núcleo (para que éste sienta la misma interacción en todos sus puntos).

Así, se obtiene una conexión directa entre las propiedades electromagnéticas que observamos y la geometría del núcleo, las cuales pueden ser conectadas fácilmente por un desarrollo multipolar.

Usando la expresión clásica de la energía de interacción de una distribución de carga  $\rho_c(\vec{r})$  y un campo aplicado  $V(\vec{r})$ :

$$E = \int V(\vec{r})\rho_c(\vec{r})d^3r$$

Sin embargo, si pasamos a la descripción cuántica, necesitamos para empezar la función de onda nuclear  $\varphi_{J,M}$ , lo cual ya nos supone un problema puesto que dicha función de onda no se conoce, por lo que es necesario efectuar aproximaciones (por ejemplo usar una combinación lineal de determinantes de Slater). De esta forma, la energía de interacción será igual a (ver un desarrollo completo en [Cohen, pág, 1050] ).

$$E = e\langle\varphi_{J,M} | \sum_{\text{protons}} V(\vec{r}_i) | \varphi_{J,M}\rangle$$

y desarrollando el potencial:

$$V(\vec{r}_i) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} V_{\ell,m}(r_i)Y_{\ell}^m(\theta_i, \phi_i)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$V_{\ell,m}(r) = \int Y_{\ell}^{m*}(\theta, \phi)V(r)d(\cos\theta)d\phi$$

en donde se puede aproximar  $V_{\ell,m}(r) \approx r^{\ell}V_{\ell,m}$  con  $V_{\ell,m}$  dependiendo de las derivadas de  $v(r)$  en el origen, pero no de  $\vec{r}$ . Y así, sustituyendo

$$E = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} V_{\ell,m}Q_{\ell,m}$$

obteniendo los *momentos polares*

$$Q_{\ell,m} = e\langle\varphi_{J,M} | \sum_z r_i^{\ell}Y_{\ell,m}(\theta_i, \phi_i) | \varphi_{J,M}\rangle \quad (1.20)$$

De este desarrollo se pueden obtener varias propiedades (basándonos en el T. de Wigner-Eckart):

---

(1)

$$\langle JM | Y_{\ell,m} | J'M' \rangle = 0$$

salvo que se verifique que  $M = m + M'$  y  $|\vec{J} - \vec{J}'| \leq \ell \leq J + J'$ .

Y de aquí, podemos obtener los valores esperados haciendo  $J = J'$  y  $M = M'$ :

$$Q_{\ell,m} \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} m = 0 \\ \text{y} \\ 0 \leq \ell \leq 2J \end{cases}$$

(2) Por el teorema de la paridad (que transforma  $\vec{r}_i \rightsquigarrow -\vec{r}_i$ ).

Ya que  $\varphi_{J,M}$  tiene una paridad definida, de forma que  $\langle \varphi_{J,M} | \varphi_{J,M} \rangle_{\text{paridad}} = 1$ , se obtiene que si  $\ell = \text{impar} \Rightarrow \sum r^\ell Y_\ell^m = \text{impar}$  de forma que

$$Q_{\ell,m} = \left\langle \sum_z r_i^\ell Y_\ell^m(\theta_i, \phi_i) \right\rangle = 0 \quad \text{para } \ell \text{ impar}$$

ya que ese valor medio es la integral (definición de producto escalar en el espacio de estados) de una función impar.

Con estas propiedades se consigue simplificar el desarrollo de la serie a sólo los valores con  $m = 0$  y  $\ell = \text{par}$ ,  $\ell \leq 2J$ , así que

$$E = \sum_{\ell=0}^{2J} V_{\ell,0} Q_{\ell,0} \quad (1.21)$$

es decir, únicamente sobreviven  $2J + 1$  términos del desarrollo.

Fijándonos en los primeros términos, podemos ver que

$$Q_{0,0} = \frac{Zr}{\sqrt{4\pi}} \quad (1.22)$$

es decir, el primer término sólo da información de la carga, pero no información sobre la geometría del núcleo.

$$Q_{2,0} \rightsquigarrow q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \frac{1}{e} Q_{2,0} \Big|_{M=J} = \langle \varphi_{J,J} | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_z r_o^2 Y_2^0(\theta_i, \phi_i) | \varphi_{J,J} \rangle \quad (1.23)$$

que se puede expresar como

$$q = Z(2\langle z^2 \rangle - \langle x^2 + y^2 \rangle) = 2Z(\langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle) \quad (1.24)$$

donde en el último paso se ha supuesto que hay simetría axial respecto al eje  $z$ .

---

---

**Cuestión 10.** Deducir el resultado dado en la ecuación (1.24).

---

---

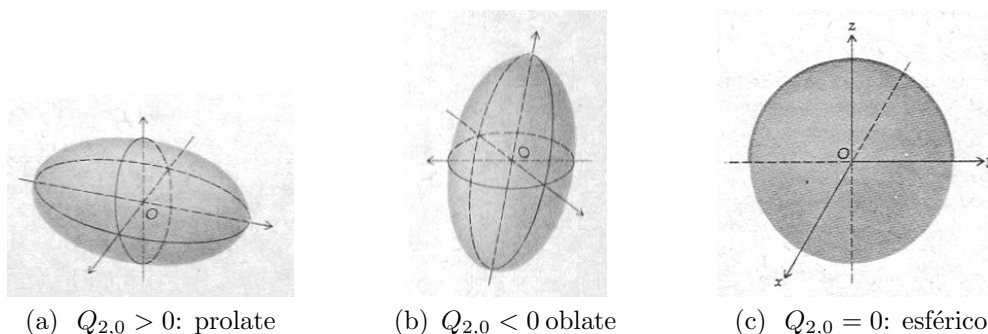


Figura 1.7: Forma cualitativa del núcleo en función de  $Q_{2,0}$ .

De aquí extraemos que la forma del núcleo en función de este término  $Q_{2,0}$  vendrá dada por lo mostrado en la Figura 1.7.

Salvo excepciones, en general los núcleos no se separan mucho de la forma esférica. A su vez, aunque clásicamente los neutrones no deberían contribuir al momento magnético pues al no tener carga éste sería cero, se obtiene que el momento magnético del neutrón es  $\mu_n \approx 1.91\mu_B$ , con  $\mu_B$  el magnetón de Bohr, mientras que para el protón  $\mu_p \approx 2.79\mu_B$ . Este hecho se explica debido a que tanto el protón como el neutrón no son partículas fundamentales, sino que están formados por tres quarks, cada uno de ellos con una carga eléctrica, por lo que aunque el neutrón netamente tiene carga cero, los efectos de las cargas eléctricas son apreciables.

## 1.6 Ecuación de estado nuclear (EOS)

Establecer la ecuación de estado nuclear sigue siendo un problema no resuelto en Física Nuclear, pero su descripción es necesaria para conocer la relación entre diferentes variables macroscópicas ( $P, \rho, T, \dots$ ) obteniendo así una descripción útil y global de los estados de equilibrio de un sistema, así como su comportamiento en diferentes condiciones y fases, y sus transiciones. Por ejemplo, nos permitiría relacionar o entender cómo se comportan los núcleos en las cuatro formas (o fases) hasta ahora conocidas para el núcleo:

- Núcleos ordinarios.
- Astrofísica: en supernovas ó en estrellas de neutrones
- En colisiones de iones pesados.

De esta forma, se podría obtener la relación que existe entre la interacción microscópica (interacción entre los constituyentes del núcleo) y las variables macroscópicas como la energía, entropía, presión, densidad ó temperatura, por ejemplo. Aquí cabe destacar que al menos en la mayoría de los casos se tendrá que  $T \ll T_F$ , donde  $T_F$  es la temperatura de Fermi del sistema, por lo que el sistema estará degenerado, es decir, los efectos cuánticos serán mucho más importantes que los debidos a la temperatura, por lo que se podrá considerar que la temperatura del sistema es prácticamente 0 K, obteniendo que  $T \propto \rho$ .

**Ejemplos clásicos.** Como un ejemplo de física clásica tenemos la *EOS de Van der Waals*, que viene dada por

$$P = \frac{kT\rho}{1 - b\rho} - a\rho^2$$

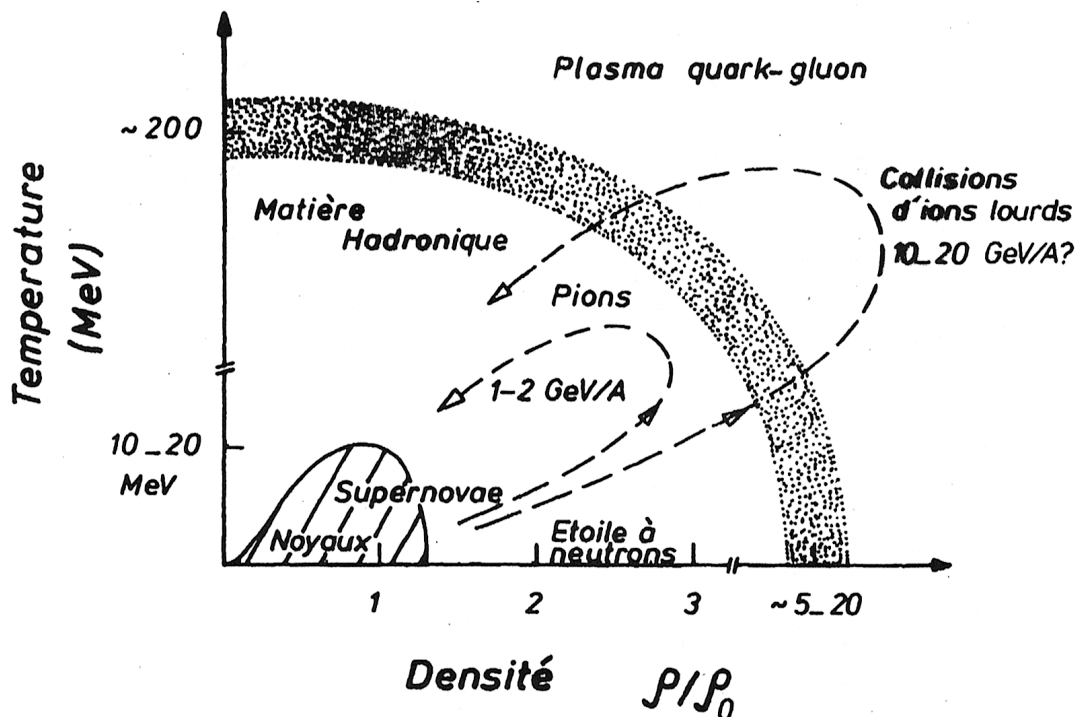


Figura 1.8: Diagrama de  $T - \rho/\rho_0$  con  $\rho_0$  la densidad nuclear de saturación.

que es útil para una descripción de los estados de equilibrio en la mayor parte de los fluidos reales, donde la ec. de los gases ideales ya no da unos resultados fiables, ya que en Van der Waals se tiene en cuenta que entre las diferentes partículas existen fuerzas repulsivas (incluidas en el parámetro  $b$ ) y atractivas (en el parámetro  $a$ ). Si tomamos que dichas fuerzas son despreciables, volvemos a la ec. de los gases ideales:

$$P = k\rho T$$

**El caso nuclear.** La primera pregunta que habría que responder es cómo se puede modelar mejor el comportamiento del núcleo, si como un fluido o directamente como un sólido. Ya que si la descripción como un fluido es aceptable, se podría utilizar el modelo de la gota líquida §1.3.1, por ejemplo.

La dificultad radica en que experimentalmente sólo conocemos un punto, el punto de saturación  $((E/A)_0, \rho_0)$  a  $T \approx 0$  K, además de que resulta muy difícil establecer la conexión entre el ámbito microscópico (la interacción nucleón-nucleón) con el ámbito macroscópico.

---

**Cuestión 11.** *¿Qué dificultades entrañaría el tratar de imponer un modelo de sólido para el núcleo? (p.e. al considerarlo como un sólido cristalino).*

---

**Materia nuclear.** Los núcleos ordinarios (con  $A \leq 250$ ) se pueden estudiar mediante la física estadística, pero el paso de éstos a un sistema infinito (que nos daría el

## 1.6. Ecuación de estado nuclear (EOS)

límite termodinámico para el ámbito macroscópico) no es inmediato. De aquí surge el concepto de *Materia Nuclear*, que es donde las variables  $P, T, \rho$  comienzan a tener sentido (ya que en el ámbito microscópico estas cantidades no tienen ningún sentido).

Para establecer la EOS sería necesario a su vez conocer el potencial nuclear, para lo cual se puede aproximar que este potencial es similar (cuantitativamente) a un potencial de Lennard-Jones molecular. Sin embargo, aparece un problema que en dicho potencial no está tratado: los nucleones son fermiones, por lo que deben obedecer el principio de exclusión de Pauli.

Así que se puede buscar otra vía, que es explorar el diagrama de fases de la materia nuclear (Figura 1.8), aunque surge el problema de que realmente sólo conocemos el punto de saturación. En este diagrama podemos ver que existen diferentes regiones (o fases) para la materia nuclear:

|                             | $T$          | $\rho$ |
|-----------------------------|--------------|--------|
| Núcleos ordinarios          | (referencia) |        |
| Supernovas                  | altas        | bajas  |
| Estrellas de neutrones      | bajas        | altas  |
| Colisiones de iones pesados | evolucionan  |        |
| Nuevo estado: QGP           |              |        |

La escala natural de temperaturas para la materia nuclear suele ser el MeV  $\sim 10^{10}$  K. A partir de  $T \gtrsim 4$  MeV el núcleo comienza a ser perturbado.

### 1.6.1 Recapitulación

- Se debe introducir un modelo de materia nuclear que tenga un tamaño infinito para poder trasladar a una descripción macroscópica (ya que aquí a todos los efectos se tiene una cantidad infinita de núcleos).
- A su vez, dentro del núcleo no se suele considerar la interacción de Coulomb (por ser unas mil veces más débil que la nuclear fuerte).
- El núcleo presenta una saturación (o régimen de saturación) en el cual alcanza una densidad constante, de tal forma que  $R = r_0 A^{1/3}$ , como consecuencia de que los nucleones deben obedecer el principio de exclusión de Pauli y por el carácter de la fuerza nuclear fuerte (alcance pequeño y barrera repulsiva a cortas distancias). Esta propiedad es bastante útil para poder definir la materia nuclear.
- Energía constante. Ya que

$$B/A \approx a_v - a_s A^{-1/3} - a_c (A - I)^2 A^{-4/3} + \dots$$

en materia nuclear, es decir cuando hacemos el límite a un número muy grande de nucleones, sólo permanece el término  $a_v \approx -15.75$  MeV (metiendo todos los términos conocidos realmente queda  $a_v \sim -8$  MeV).

---



---

**Cuestión 12.** *¿Qué modelo simple podríamos idear para dar cuenta de la materia nuclear?. Ayuda: tomar como modelo simple un gas de Fermi, poniendo la energía (o la energía por nucleón  $E/A$ ) en función de la densidad. (se obtendrán dos términos, viendo que dicho modelo no puede funcionar realmente).*

---



---

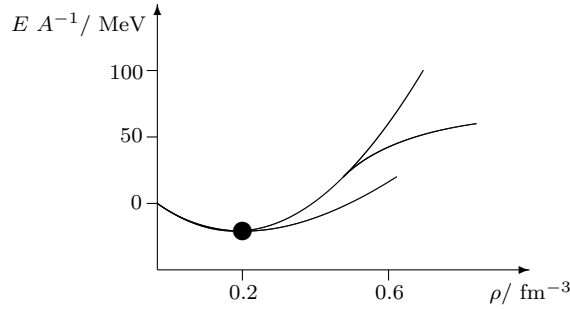


Figura 1.9: Diferentes ajustes que pasan por el único punto de equilibrio que se conoce con precisión, ya que es el estado donde se encuentra la material normal, lo que no nos da mucha información acerca de la curvatura de la curva ni su comportamiento a otras densidades.

- **Consideraciones sobre la EOS nuclear.**

Con el modelo anterior se obtiene  $E/A = f(\rho)$ , sin embargo como únicamente conocemos un único punto no podemos establecer con precisión cual va a ser el comportamiento de dicha función (ver Figura 1.9).

Aunque en el caso en que tengamos una función aproximada, podremos obtener a partir de ésta la presión:

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,A} = \rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho}$$

en donde tomaremos que  $T \sim 0$  K. A su vez, el punto de saturación viene fijado por las condiciones

$$P = \rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$$

ya que dicho punto debe ser un punto de equilibrio en la EOS.

- **Módulo de incompresibilidad.**

Queremos tener información sobre el entorno alrededor del punto de saturación, el cual vendrá dado por el módulo de incompresibilidad

$$K_\infty = \left( k_F^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial k_F^2} \right)_{\rho=\rho_0} \quad (1.25)$$

que nos da información acerca de la curvatura en dicho punto. Esto nos permite desarrollar en serie la expresión de  $E/A(\rho)$  de forma que

$$E/A(\rho) \approx E/A(\rho_0) + \frac{1}{18} k_\infty \frac{(\rho - \rho_0)^2}{\rho_0^2} \quad (1.26)$$

## 1.6. Ecuación de estado nuclear (EOS)

---

en donde experimentalmente se obtienen los valores (para el equilibrio):

$$E/A \sim 16 \text{ MeV} \quad \rho \sim 0.14 \text{ fm}^{-3} \quad k_{\infty} \approx 220 \pm 30 \text{ MeV}$$



# Capítulo 2

## Potencial entre dos nucleones

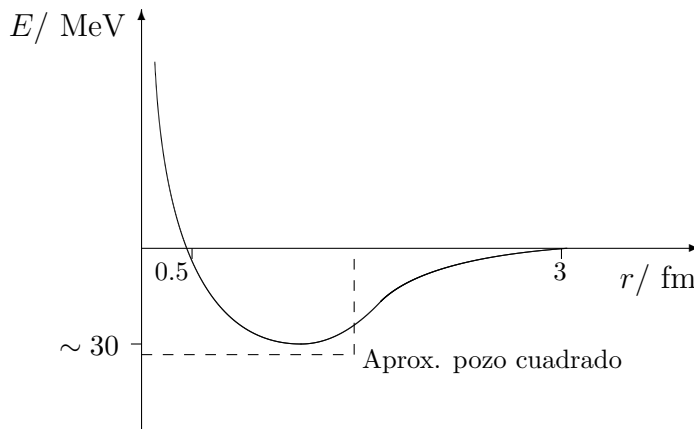
Hasta ahora hemos visto cómo la interacción fuerte es la que domina en el interior del núcleo, de forma que ésta es la principal interacción entre los nucleones. Sin embargo, todavía no hemos visto cómo es esta interacción ni qué forma cuantitativa tiene. Antes de profundizar en dicha interacción, podemos comentar antes alguna de las propiedades que la diferencian de otras fuerzas ya conocidas:

- La interacción que causa un nucleón influye sobre otro nucleón, a la vez que la que causa este último nucleón actúa sobre el primero. Pero para la nuclear también se obtiene que un mismo nucleón se afecta a sí mismo.
- La fuerza fuerte también depende de los spines de los nucleones, así como de si es un protón o un neutrón los que interaccionan. Y el hecho de que dependa de los spines y de los momentos angulares hace que esta fuerza tenga un carácter tensorial, no pudiéndola poner realmente como una única función de  $r$ .
- Es atractiva, ya que vence la repulsión coulombiana existente entre los protones.
- De corto alcance, algo necesario para que el núcleo no pueda crecer indefinidamente hasta colapsar.
- Extremadamente intensa:  $\sim$  MeV.
- Tiene a su vez un *core* fuertemente repulsivo (i.e. una pared repulsiva a muy cortas distancias), lo que garantiza que no haya colapso. Esta pared repulsiva ocurre más o menos cuando los nucleones comienzan a solapar.

Para conocer cómo es la interacción entre dos nucleones existen tres vías que nos conducen prácticamente a los mismos resultados. Estos tres caminos son: el uso de simetrías; la vía puramente teórica de la *Teoría Cuántica de Campos* (QFT) y el método puramente experimental de difusión por nucleones.

A su vez, hay dos formas simples de simular dicha fuerza para los casos en que no se requiere una descripción completamente exacta de dicho potencial y que con la dependencia radial es suficiente, que son el *pozo cuadrado* y el *potencial de Yukawa*. El primero viene dado por

$$V = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (2.1)$$



y como vemos carece de parte repulsiva, por lo que en general una descripción del núcleo con este potencial llevará al colapso. Sin embargo, para el deuterón proporciona una descripción aceptable, algo que tiene relación con el hecho de que los nucleones de éste están más distantes de lo normal, no llegando a la condición de saturación.

Por otro lado está el *potencial de Yukawa*, que es de la forma

$$V_Y = -V_0 \frac{\exp(-r/R)}{r/R} \quad (2.2)$$

y con el que se puede construir, por ejemplo, un potencial que sea combinación lineal de dos potenciales de Yukawa, uno atractivo y otro repulsivo, dando así una descripción bastante aproximada de la dependencia radial de la interacción fuerte (recordemos que ésta también tiene términos tensoriales, los cuales aquí continúan sin considerarse).

---

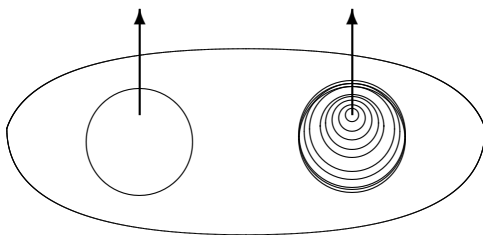
---

**Cuestión 13.** *¿Qué papel juega el principio de incertidumbre para formar estados ligados?*

---

---

## 2.1 El deuterón



El deuterón ( $A = 2, N = 1, Z = 1$ ) tiene una cierta importancia en física nuclear debido a que es un sistema en donde se tiene la interacción de dos nucleones (y solo dos) por lo que resulta útil para obtener la interacción

fuerte que se produce entre un par de nucleones. Sin embargo, hay que decir que la interacción deducida aquí entre estos dos nucleones no puede ser extendida para describir al resto de núcleos describiéndolos como interacciones entre pares de nucleones, ya que el resto de núcleos perturba esta interacción, cambiando dicho potencial.

Experimentalmente se obtiene que la energía de ligadura del deuterón es  $E = 2.2245 \pm 0.0002$  MeV, muy inferior que los  $\sim 8 \pm 10\%$  que tienen el resto de núcleos (recordar Figura 1.2). Esto se debe a que en el deuterón el núcleo no ha alcanzado la densidad de saturación, por lo que ambos nucleones están más separados que de costumbre (en núcleos más grandes, ya con la densidad de saturación).

A su vez, al medir el momento magnético nuclear se obtiene un valor  $\mu_d \approx 0.857\mu_N$  donde  $\mu_N$  es el magnetón nuclear, por lo que aproximadamente se cumple que  $\mu_d \approx \mu_p + \mu_n$  ( $\mu_p \approx 2.79\mu_N$  y  $\mu_n \approx -1.91\mu_N$ ), lo que sugiere que los momentos magnéticos de ambos nucleones deben ser paralelos (solo así se obtendría que el momento magnético resultante es igual a la suma de ambos, ya que recordemos que estamos sumando vectores). Si aquí despreciamos el momento angular que pudieran tener ambos nucleones, únicamente queda la contribución del spin, por lo que éste tiene que ser paralelo para ambos nucleones, lo que sugiere que el deuterón se tiene que encontrar en un estado  ${}^3S_1$  (notación  ${}^{2S+1}L_J$ ), ya que como cada spin es  $1/2$ , al estar paralelos el spin total será  $S = 1$ , y momento angular orbital  $L = 0$  puesto que hemos dicho que prácticamente éste término debe ser despreciable.

### 2.1.1 Función de onda y otras características

El hecho de que en el deuterón no se alcance la densidad de saturación posibilita que se pueda utilizar un modelo de pozo cuadrado para describir razonablemente bien dicho núcleo:

$$V = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.3)$$

Como hay dos nucleones, se utiliza (prácticamente siempre en este capítulo) una descripción a dos cuerpos (es decir, la función de onda describe ambos nucleones, no una función de onda para cada uno), por lo que se pasa a coordenadas de centro de masas (CM), con la función de onda sólo dependiendo de la distancia entre los nucleones:

$$R = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \wedge \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

obteniendo que la ecuación de Schrödinger es separable en las coordenadas de CM y de las coordenadas relativas  $\vec{r}$ , por lo que  $\Psi = \psi_{CM}\psi_r$ , en donde solo nos interesa la coordenada relativa. Por último, para simplificar las ecuaciones se introduce la función de onda radial:

$$u(r) = r\psi(r)$$

de forma que la ecuación de Schrödinger queda de la forma

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E)u = 0 \quad (2.4)$$

análoga al caso unidimensional, donde  $\mu$  es la masa reducida del sistema neutrón-protón (n-p).

Como tenemos un potencial definido a trozos, obtendremos dos soluciones diferentes, una para cada región:

**Región I:**  $V = -V_0$ .

Aquí, la función  $u(r)$  debe satisfacer la ecuación (2.4) con la condición de contorno de que en  $r = 0$  dicha función tienda a cero, ya que de otra forma, como  $\psi = u/r$ , la función de onda divergería en el origen. Con esto, obtenemos la solución

$$u = \frac{A}{k_d} \sin k_d r, \quad \text{con } k_d^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E) \quad (2.5)$$

**Región II:**  $V = 0$ .

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(-E)u = 0$$

Considerando un estado ligado ( $E < V_0$ ), la solución que obtenemos es

$$u = B \exp(-\alpha(r - R)), \quad \text{con } \alpha^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \sim 0.23^2 \text{ fm}^{-2} \quad (2.6)$$

por lo que  $\alpha^{-1}$  nos da una idea del tamaño que tiene el deuterón.

Dado que ambas soluciones deben ser continuas y con derivadas continuas en  $r = R$ , condición que podemos poner de la forma

$$\frac{1}{u_I} \frac{du_I}{dr} = \frac{1}{u_{II}} \frac{du_{II}}{dr}$$

obtenemos la relación

$$k_d \cot k_d R = -\alpha \quad (2.7)$$

en donde sustituyendo los valores de  $\alpha$  y  $k_d$ , dados en (2.5) y (2.6), obtenemos

$$\cot k_d R = - \left( \frac{E}{V_0 - E} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Dado que experimentalmente se obtiene unos valores de  $E \sim 2.2 \text{ MeV}$  y  $V_0 \sim 30 - 60 \text{ MeV}$  (por vía de scattering de neutrones por el núcleo):

$$k_d R \approx \frac{1}{2} \pi$$

y de esta relación, elevando al cuadrado y sustituyendo el valor de  $k_d^2$ , se puede obtener que

$$V_0 R^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \sim 10^{-38} \text{ MeV cm}^2 \quad (2.9)$$

que nos relaciona la anchura y la profundidad del pozo (como  $V_0 \sim 30 \text{ MeV} \Rightarrow R \sim 1.8 \text{ fm}$ ). Ahora, si se toma una energía distinta de cero, de obtiene que

$$V_0 R^2 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}$$

por lo que la relación (2.9) nos da la condición para que exista un estado ligado.

## 2.1.2 Momento magnético y cuadrupolar eléctrico

Experimentalmente se tienen los siguientes valores para el momento magnético (medido en unidades del magnetón nuclear)

$$\begin{aligned}\mu_d &= 0.857411 \pm 0.000019 \\ \mu_n &= -1.91315 \pm 0.00007 \\ \mu_p &= 2.79271 \pm 0.08002\end{aligned}$$

por lo que

$$\mu_n + \mu_p = 0.87956 \pm 0.00007$$

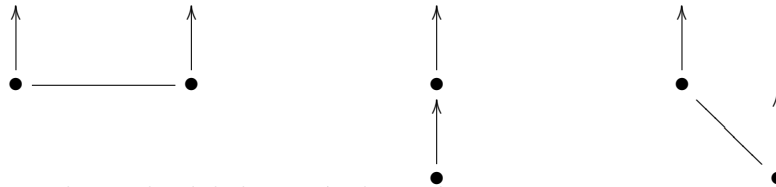
que es casi igual al momento magnético del deuterón. Sin embargo, no es exactamente igual a la suma del momento del protón y del neutrón, lo que nos hace confirmar que existe algún término adicional. Y aquí es cuando se hace necesario introducir un término debido al momento angular orbital que debe tener el deuterón, el cual se había despreciado antes, de forma que el momento magnético será:

$$\vec{\mu}_d = j_p \vec{s}_p + g_n \vec{s}_n + \frac{1}{2} \vec{L}$$

donde el término de  $\vec{L}$  debe ser mucho menor que los otros dos, aunque como hemos visto no despreciable del todo.

Por otra parte, el término  $Q_2$  del deuterón es  $Q_2 \sim 0.29 \text{ fm}^2$ , que es relativamente pequeño pero **no nulo** (y recordando lo dicho en la Figura 1.7, al ser  $Q_2 > 0$  es un *prolate*, i.e. el núcleo no tendrá simetría esférica realmente), lo que nos muestra que el deuterón tendrá un núcleo prácticamente esférico pero que está algo deformado. Por esta razón, nos vemos obligados a concluir que el estado del deuterón no puede ser únicamente un  $S$ , ya que éste es completamente esférico, sino que la función de onda debe contener un pequeño porcentaje de otro estado, no esférico, que como veremos más adelante se corresponde con un estado  ${}^3D_1$ .

Esto se debe fundamentalmente a que las fuerzas nucleares no son exclusivamente centrales, sino que deben tener componentes tensoriales, lo cual se puede *visualizar* fácilmente si nos imaginamos los dos nucleones junto con sus momentos angulares, donde vemos que las diferentes posiciones no son equivalentes:



Con todo esto, el estado del deuterón le podremos poner como

$$\psi = a \psi({}^3S_1) + b \psi({}^3D_1) \quad (2.10)$$

por lo que al obtener una medida sobre el sistema deberemos tener en cuenta a ambos estados además de la posible interferencia que se produzca entre ellos (la cual en algunos casos será importante). Aunque como vimos, el estado  $S$  es el dominante, dando una contribución del 90 % a dicha función, por lo que el estado  $D$  solo contribuirá en un 10 %.

## 2.2 Isoespín

El *isoespín* es otro número (o concepto) cuántico que se introduce con la motivación única de facilitar el apartado teórico, ya que realmente no aporta ninguna propiedad nueva al sistema como sí lo hizo el spin.

La idea surge de la increíble semejanza que guarda el protón con el neutrón, los cuales, si se elimina la parte debida a la interacción electromagnética, son indistinguibles (de cara a la interacción fuerte). La “única” propiedad que no coincide totalmente son sus masas, pero éstas se diferencian mínimamente también, ya que

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \approx 10^{-3}$$

Por esta semejanza, es razonable pensar que ante la interacción fuerte se pueda describir ambas partículas como una misma partícula, y que ésta puede estar en dos estados diferentes: protón ó neutrón. Y esto es lo que se hace con la introducción del *isoespín*.

Así, realizando una analogía con el spin, podemos describir que dicha partícula la veremos como un protón o como un neutrón en función de su proyección de *isoespín*:  $|+\rangle \equiv p^+$  ó  $|-\rangle \equiv n^0$  (i.e. se les asigna unos autovalores  $\pm 1/2$ , al igual que el spin de los nucleones).

Y debido a esta definición, el isospin se comporta *como si* fuera un momento angular, igual que el momento angular orbital o el spin, con la única diferencia de que en este caso no se corresponde con “algo” (un espacio) físico real, sino que se localiza en un espacio abstracto que se añade teóricamente. Y como puede tomar dos valores ( $|+\rangle$  ó  $|-\rangle$ ), obtenemos que el operador de isospin vendrá descrito por las tres matrices de Pauli (iguales a las del spin 1/2):

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

a las cuales se añade la matriz identidad para completar la descripción. Formalmente ya vemos que el isospin es exactamente igual al spin, por lo que trabajar con él va a ser idéntico a trabajar con partículas con spin 1/2. Y tal y como definimos los “estados” protón y neutrón, se tiene que éstos llevan asociados los estados

$$|p\rangle \equiv |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |n\rangle \equiv |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde el estado del nucleón será una combinación de ambos:  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ .

Además de esto, se puede completar la descripción introduciendo, al igual que en el caso de spin, los operadores  $t_+$  y  $t_-$ , que vendrán dados por

$$t_+ = t_1 + it_2 \quad \wedge \quad t_- = t_1 - it_2$$

además de que el operador de rotación vendrá definido (al igual que con el spin) por

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\theta\hat{n} \cdot \vec{t}\right) \quad (2.12)$$

de forma que una rotación en el espacio de isoespín cambiará un protón por un neutrón, y a la inversa, o bien un estado mezcla.

---

## 2.3 Función de onda de uno y dos nucleones

Con lo visto hasta ahora, para poder realizar una descripción de la función de onda a uno y dos nucleones necesitaremos trabajar con una función que dependa de las variables espaciales, las del espacio de spin, de isospin y los momentos angulares. Como dichos espacios son independientes entre sí, podemos garantizar que dicha función de ondas pueda ser separable en la forma

$$\psi = \phi_r \phi_s \phi_t$$

donde los subíndices  $r, s, t$  denotan la parte espacial, de spin y de isospin de la función de onda, respectivamente. De esta forma, por ejemplo, un neutrón libre con espín hacia arriba quedaría descrito por la función

$$\psi_n(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, existen ciertas restricciones que debe cumplir la función de onda para ser capaces de describir a los nucleones. Para empezar, dado que éstos son partículas con spin  $1/2$ , sabemos que la función de ondas que describa a un par de nucleones **debe ser antisimétrica**. Es decir,

$$\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$$

A su vez, dado que estamos trabajando con dos nucleones, es conveniente pasar a una descripción con coordenadas globales:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{s}(1) + \vec{s}(2), & \vec{R} &= \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \\ \vec{T} &= \vec{t}(1) + \vec{t}(2), & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi(\vec{R}, \vec{r}) \chi_{S, S_z} \Theta_{T, T_z}$$

y por tanto en función de si la parte angular es simétrica o antisimétrica, la parte espacial deberá ser antisimétrica o simétrica, respectivamente, para que la función de onda total sea siempre antisimétrica.

### Estados de spin.

Para construir dichas funciones es necesario utilizar el acoplamiento de momentos angulares (para pasar de la descripción de momentos de cada partícula a momentos globales), con lo que obtendremos estados singlete y triplete. Así que, utilizando la notación  ${}^{2S+1}L_J$ :

#### Singlete:

$${}^1S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sigma_+(1)\sigma_-(2) - \sigma_+(2)\sigma_-(1) \}$$

donde se ha utilizado la notación  $\sigma_{s_z}$  para indicar el estado de spin de la partícula 1 ó 2.

**Triplete:**

$$\begin{aligned} {}^3S_1 &= \sigma_+(1)\sigma_+(2) \quad \uparrow\uparrow \\ {}^3S_{-1} &= \sigma_-(1)\sigma_-(2) \quad \downarrow\downarrow \\ {}^3S_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sigma_+(1)\sigma_-(2) + \sigma_+(2)\sigma_-(1)\} \quad \uparrow\downarrow \end{aligned}$$

**Estados de isospín.**

Dado que el isospín actúa de una forma idéntica a como actúa el spin, obtendremos unos estados formalmente equivalentes a los anteriores:

**Singlete:** (será un estado  $p - n$ : protón-neutrón).

$${}^1\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Theta_p(1)\Theta_n(2) - \Theta_p(2)\Theta_n(1)\}$$

**Triplete:**

$$\begin{aligned} {}^3\tau_1 &= \Theta_p(1)\Theta_p(2) \\ {}^3\tau_{-1} &= \Theta_n(1)\Theta_n(2) \\ {}^3\tau_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Theta_p(1)\Theta_n(2) + \Theta_p(2)\Theta_n(1)\} \end{aligned}$$

en donde vemos que el estado  ${}^3\tau_0$  y el  ${}^1\tau_0$  representan ambos a un estado con un protón y un neutrón, pero tienen diferente simetría (uno de ellos es simétrico y el otro antisimétrico).

Ahora se puede extender este concepto a la función de onda del núcleo, la cual describirá a los  $A$  nucleones de éste:

$$\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \tau_1, \dots, \vec{r}_A, \sigma_A, \tau_A)$$

---

---

**Cuestión 14.** *Escribir los estados de un par de nucleones con  $J = 1$  en notación espectroscópica (es decir, de la forma  ${}^{2S+1}L_J$ ). Se deberá obtener 16 posibilidades (estados), de los cuales 10 de ellos serán antisimétricos espaciales y únicamente 6 simétricos.*

---

---

## 2.4 Vías para obtener información sobre el potencial nuclear

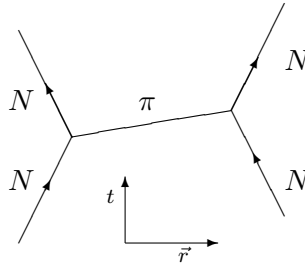
Hasta ahora, seguimos sin conocer una descripción buena de la interacción nuclear, la que domina en el núcleo, por lo que llegó el momento de intentar encontrar la expresión de cómo es su potencial, lo que nos dará la información para poder comprender qué ocurre en el núcleo.

Para obtener dicho potencial existen fundamentalmente tres vías diferentes, dando las tres resultados semejantes. Estas vías mencionadas son:



**Simetrías.** A través de las simetrías conocidas que debe presentar el sistema se puede limitar la forma que puede tener el potencial nuclear. Por ello, aunque este método no nos da cómo es dicho potencial exactamente, sí nos pone limitaciones a cómo debe ser, por lo que resulta útil para descartar posibles resultados erróneos. Estas simetrías recordemos que están íntimamente ligadas con las invariancias que tendrá el sistema, puesto que cualquier simetría del sistema nos proporciona una cantidad que se conserva. Un ejemplo sería el isoespín, que, como vimos, se conserva en una interacción fuerte.

**Teoría Cuántica de Campos (QFT).** Aquí, las interacciones que se producen en un sistema son descritas como intercambios de una partícula, que será el *fotón* en el caso de una interacción electromagnética o el *pión* en el caso de la interacción fuerte. Por lo tanto, con dicha teoría se pasará a dar una descripción de la interacción nucleón-nucleón en base a un intercambio de un *pión*.



**Scattering nucleón-nucleón.** Por último, el método experimental que será el que da la última respuesta sobre si se verifican las predicciones efectuadas por los dos modelos anteriores o no. Aquí, estamos exactamente con la misma ecuación de Schrödinger que cuando discutimos el deuterón, solo que en este caso el sistema no es ligado por lo que lo único que cambia es que ahora  $E > 0$ . Así, mediante el scattering de interacciones  $n-p$ ,  $n-n$  ó  $p-p$  podemos conocer los valores del alcance y de la intensidad de la interacción nuclear, por ejemplo.

## 2.4.1 Simetrías e interacción nuclear

En la interacción entre nucleones, debido a que la fuerza nuclear es de corto alcance, podemos considerar inicialmente que se trata básicamente de una interacción a dos cuerpos (entre pares de nucleones). Esto hace que el hamiltoniano de un núcleo atómico pueda ser descrito por

$$H_N \approx \sum_i^A T_i + \sum_{i < j}^A V_{ij} + \mathcal{O}(n > 2)$$

donde  $T_i$  es la energía cinética de cada nucleón,  $V_{ij}$  es la interacción entre pares de nucleones y  $\mathcal{O}(n > 2)$  hace referencia a los términos debidos a interacciones a más de dos nucleones, que es la parte que ignoraremos según hemos dicho.

Un primer problema que se nos presenta es que el término  $V_{i,j}$  es desconocido por ahora (no conocemos cómo es dicho potencial), y dado que tiene una pared repulsiva muy fuerte a cortas distancias, no se puede tratar de resolver por métodos perturbativos debido

## 2.4. Vías para obtener información sobre el potencial nuclear

a que dicho término no es pequeño. Por ello, se realiza una hipótesis diferente para poder simplificar el problema:

**Hipótesis:** la interacción de los nucleones próximos sobre un nucleón se puede interpretar como una interacción sobre ese nucleón de un potencial promedio existente en el núcleo y que será el resultado del resto de nucleones.

Con esta hipótesis, podemos pasar de un potencial fuerte definido por  $\sum_{ij} V_{ij}$  a un potencial de la forma  $\sum \bar{V}_i$ , que será el potencial promedio debido a los otros nucleones en una interacción a dos cuerpos.

Por otro lado, de partida se pueden establecer varias simetrías o invariancias que debe cumplir dicho hamiltoniano, conocidas por diversos hechos experimentales en general:

- **Simetría de la carga.** (en algunos sitios llamada *independencia* o *conservación*). Esta hipótesis está basada en algunos hechos experimentales, como la existencia de *núcleos espejo*. Éstos son núcleos isóbaros (con el mismo  $A$ ) pero cambiando el número de protones por el de neutrones. Por ejemplo  ${}^{25}_{12}\text{Mg}_{13}$  y  ${}^{25}_{13}\text{Al}_{12}$ . En estos núcleos se obtiene un espectro de niveles y unas propiedades muy similares, y de hecho si se elimina las interacciones electromagnéticas se tiene que las diferencias entre dichos núcleos se reducen aún más.

Por lo tanto, desde el punto de vista de la interacción fuerte los protones y los neutrones se comportan exactamente (con algún pequeño matiz al entrar en más profundidad, y siempre que eliminemos la interacción electromagnética) igual, que fue la razón que nos llevó a definir el isoespín y la que le provee de su utilidad.

Aquí hay que destacar que realmente se pueden dividir dos simetrías:

- **Simetría de carga.** Que se refiere a que podemos cambiar todos los neutrones por protones (y a la inversa) y la interacción nuclear permanece invariante.
- **Independencia de carga.** Restricción más fuerte que la anterior, que involucra un intercambio de cualquier par de nucleones existentes en un mismo multiplete.

Por otro lado, una nueva descripción que se puede hacer de la interacción coulombiana del núcleo es ponerla en términos del isoespín (su tercera componente concretamente), como una interacción que se da entre pares de nucleones, por lo que dicho potencial se puede poner como

$$V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \sum_{i<j}^A \frac{(1 + \tau_3^i)(1 + \tau_3^j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

donde  $\tau_3$  es la tercera componente de isoespín (y por tanto valdrá  $\pm 1$  en función de que sea un protón o neutrón). De esta forma, en el caso en que al menos uno de los dos nucleones considerados sea un neutrón la interacción coulombiana da cero, mientras que si ambos son protones, ese término de interacción  $i, j$  nos queda la interacción coulombiana clásica. De esta forma, se puede ver que el operador de isoespín está íntimamente relacionado con la carga, ya que ésta ahora se puede poner como

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (1 + \tau_3^i) \approx \frac{1}{2} A + T_3$$

con lo que se llega a que la invariancia de la carga produce que el hamiltoniano debe conmutar con la tercera componente del isoespín:  $[H, T_3] = 0$ .

- **Invariancia de isoespín.** Bajo la interacción fuerte se obtiene que tanto  $\vec{T}$  como  $T_3$  (el operador isoespín y su tercera proyección) se conservan. Esta invariancia nos lleva a que  $H$  (el hamiltoniano de interacción entre dos nucleones) debe conmutar con dicho operador, y por tanto también con todos los generadores de las rotaciones del espacio de isoespín.:

$$[H, \vec{T}] = [H, T^2] = [H, T_3] = 0$$

Esta característica es la que permite la existencia de núcleos espejo, ya que al conmutar las variables de isoespín, el hamiltoniano queda invariante frente a cualquier cambio de protón por neutrón (rotación en el espacio de isoespín).

- **Invariancia frente a traslaciones.** En el caso en que podamos considerar que el espacio es homogéneo en todo punto, cualquier traslación de las coordenadas deberá dejar al sistema sin cambio, por lo que habrá una invariancia frente a traslaciones. Aquí hay que puntualizar que si se está considerando una región donde hay un entorno que interacciona con nuestros nucleones, esta afirmación deja de ser válida, puesto que una traslación no dejará al sistema en un punto del espacio equivalente al primero. Esto nos lleva a que si la interacción no cambia por trasladar las coordenadas, ésta debe forzosamente de depender únicamente de la diferencia de ambas posiciones,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Y dado que el generador de las traslaciones es el momento lineal (recordemos que una traslación viene dada por el operador  $U(\vec{a}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{p})$ ), éste debe conmutar con el hamiltoniano del sistema:

$$[H, \hat{p}] = 0$$

- **Invariancia frente a rotaciones.** A su vez, la interacción nuclear no depende de la orientación de los ejes en el espacio, por lo que el sistema debe ser invariante frente rotaciones. Por ello, dado que las rotaciones están generadas por el operador  $R(\hat{n}, \theta) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\vec{J} \cdot \hat{n}\theta)$ , se obtiene que el hamiltoniano del sistema también debe conmutar con el momento angular:  $[H, J] = 0$ .

- **Invariancia frente a inversión espacial (paridad).** Experimentalmente se obtienen los mismos resultados cuando se realiza una inversión espacial. Por lo tanto, la interacción fuerte debe conservar la paridad.

Dado que acabamos de decir que el hamiltoniano nuclear debe ser invariante frente a rotaciones y a inversiones, el único resultado posible es que **los distintos términos que tendrá dicho hamiltoniano deben ser escalares** (pues de otra forma sí variarían al realizar una rotación o una inversión).

- **Otras invariancias.** Como son la invariancia frente a la inversión temporal ó la invariancia ante cualquier transformación galileana, las cuales también verifica nuestro hamiltoniano.

\* **Nota acerca de los operadores.** Se puede definir diferentes tipos de operadores (o tensores más bien) en función de su comportamiento frente a rotaciones e inversiones, obteniendo

- Escalares. Son los tensores que son invariantes frente a rotaciones ó inversiones. Es decir, realmente son *números* (tensores de orden 0), ya que no cambian con estas operaciones.
- Pseudoescalares. En este caso siguen siendo invariantes frente a rotaciones, pero cambian de signo ante inversiones, por lo que no son propiamente escalares. Se suelen construir multiplicando un vector axial por un vector polar.
- Vector polar. Son los vectores (tensores de orden 1) que se comportan igual que el vector de posición frente a rotaciones e inversiones, como el propio  $\vec{r}$  ó  $\vec{p}$ .
- Vector axial (o pseudovector). Son vectores que se comportan como el vector posición frente a rotaciones, pero que se comportan como un escalar frente a inversiones (es decir, quedan invariantes ante inversiones). Por ejemplo,  $\vec{L}$ , ya que como  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , al realizar una inversión,  $\vec{r}$  cambia de signo y  $\vec{p}$  cambia de signo, por lo que en definitiva  $\vec{L}$  no cambia de signo.

### 2.4.2 Construcción del potencial nuclear

A partir de la interacción entre dos nucleones se va a intentar dar forma al potencial nuclear, que será una función  $V = V(\vec{r}, \sigma, \tau)$ , es decir, dependiente de las coordenadas espaciales, del spin, y del isospín. Por lo que hemos visto hasta ahora, en una interacción entre dos nucleones se tendrá como variables a los spines de cada nucleón:  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ , sus isospines:  $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$  y el vector posición relativo entre ambos:  $\vec{r}$  (no incluiremos el vector  $\vec{p}$  aunque en principio también podría depender de éste). Además, conocemos las simetrías que debe tener dicho potencial, por lo que solo habrá ciertas combinaciones entre dichos términos que estarán permitidas, como por ejemplo que debe ser un escalar.

Para empezar, sobre los términos de spin y de isospín, ambos regidos por las matrices de Pauli (ver (2.11)), conocemos a priori que nos tenemos que quedar únicamente con términos lineales, ya que por las propiedades que tienen dichas matrices, como por ejemplo que  $[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ , cualquier potencia que tengamos de una de las matrices se puede descomponer como combinación de otras matrices de Pauli, todas ellas elevadas a potencias de uno.

Por ello y por las otras propiedades que se deben cumplir, se obtiene que los únicos posibles términos válidos serán:

$$V(r), \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}), (\vec{\sigma}_1 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \times \vec{r})$$

o alguna combinación o producto entre ellos (por ejemplo, un término de la forma  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})$  estaría excluido porque dado que  $\vec{\sigma}$  es un vector axial pero  $\vec{r}$  es polar, dicho producto no conservaría la paridad).

---

**Cuestión 15.** Comprobar que se cumple que  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)^2 = 3\mathbb{I} - 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ .

A estos términos habrá que añadirles la contribución de isospin, la cual sabemos por lo dicho en el último apartado que deberá tener como propiedades:

- Conservación de la carga, por lo que  $[H, T_3] = 0$ .
- Independencia de la carga, luego  $[H, \vec{T}] = 0$ .
- Simetría de la carga, por lo que  $[H, \Pi] = 0$ .

Un término que cumple estas propiedades es, por ejemplo,  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ .

---

**Cuestión 16.** Verificar que  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$  cumple esas condiciones.

---

Como vimos en §2.1.2, el estado del deuterón no puede provenir únicamente de un estado  $^3S_1$ , siendo necesario la existencia de un término no esférico, el cual debe provenir forzosamente de una fuerza de tipo tensorial, y ésta será de la forma (se omite una demostración de esto)

$$S(1, 2) = \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

donde el carácter tensorial proviene del término  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})$ .

Juntando todo lo dicho hasta ahora obtenemos una expresión general para el potencial nuclear fuerte, que debe tomar la forma

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, \vec{\sigma}, \vec{\tau}) = & V_R(r) + V_\sigma(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_\tau(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\ & + V_{\sigma_2}(r) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + S_{1,2} [V_T(r) + V_{T_3}(r) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde la primera línea contiene los términos que contribuyen a la parte central del potencial y la segunda línea tiene los términos de la parte no central.

### 2.4.3 Determinación del potencial por vía teórica

Para la deducción teórica del potencial nuclear, primero se parte de la interacción electromagnética y después se hace una analogía a ésta para la interacción fuerte, así que comenzamos por una descripción de la electromagnética.

En QFT tiene lugar el proceso que se conoce como *segunda cuantización* en el que, entre otras cosas, se pasa a describir todo este tipo de interacciones como la compartición de una partícula entre las que interaccionan, produciendo al final los mismos resultados. Con esto, la interacción electromagnética resulta ser descrita por medio de un proceso en el que se comparte un fotón entre las dos partículas.

Fuera aparte de esto, no está de más recordar las ecuaciones *clásicas* del electromagnetismo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

## 2.4. Vías para obtener información sobre el potencial nuclear

o bien en términos de un potencial:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - c^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho\end{aligned}$$

con  $\vec{A}$  el potencial vector y  $\phi$  el potencial escalar. A su vez, dicho potencial escalar verificará, en una región libre de fuentes, la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0$$

O bien

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q \delta(\vec{r})$$

si se tiene una fuente puntual localizada en el origen de coordenadas, lo que nos dará una solución de la forma

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

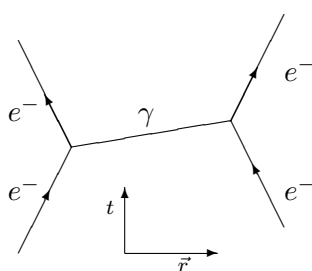
que es el potencial coulombiano conocido.

Volviendo a la cuantificación del campo electromagnético, se pasa a describir dicho campo como el intercambio de un *fotón*, el cual se crea como consecuencia de las cargas presentes (es decir, éstas son las fuentes de estos fotones).

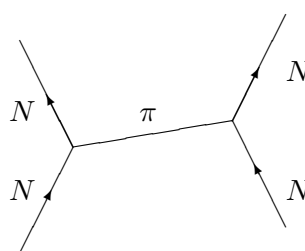
### Interacción nuclear

Pasando a la interacción nuclear, sabemos que para empezar tendremos que hacer frente a una gran diferencia respecto al caso electromagnético: la fuerza fuerte es de corto alcance. Sin embargo, realizando una analogía a éste, Yukawa ideó que la fuerza fuerte también podría ser descrita como una compartición de una partícula, con la condición de que esta partícula debería ser escalar, es decir no tener componentes tensoriales. Por ello, esta partícula portadora de la interacción fuerte debería ser un bosón, postulándose la existencia del *pión* (realmente, en esa época todavía no se había descubierto al pión, algo que se produjo varios años después, por lo que al principio se pensó que el responsable de esta interacción era el muón, el cual sí se conocía en aquel entonces, pero dado que este es un hadrón, i.e. entre otras cosas es una partícula no escalar, se hizo evidente que éste no podía ser realmente).

Y al igual que en el caso electromagnético se dice que las fuentes del fotón son las cargas, aquí se dice que las fuentes de los piones son los nucleones.



Int. electromagnética



Int. nuclear

Hay que puntualizar que estas partículas son virtuales, en el sentido en que no se pueden observar físicamente en un principio. Esto se debe a que si vemos el diagrama de la interacción (figura anterior para la interacción nuclear), justo después de que el pión haya sido emitido por uno de los núcleos, se obtiene un aumento de la energía del sistema, puesto que a los dos nucleones que tenemos hay que añadir al pión, el cual además tiene una masa bastante grande ( $\sim 140$  MeV). Sin embargo esto no entra en contradicción con la conservación de la energía, pues el *principio de incertidumbre de Heisenberg* permite estos fenómenos siempre que el tiempo que duren sea inferior a un valor dado por

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad \implies \quad \Delta t \sim \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \sim 10^{-24} \text{ s}$$

Por ello, directamente tenemos un límite superior al tiempo que dura esta interacción, el cual es muy inferior al tiempo más corto medible en laboratorio.

### Ecuación de Klein-Gordon

Siempre que se estén considerando núcleos con un gran número de nucleones aparecerán efectos relativistas que tendrán que ser tenidos en cuenta. Por ello, se invalida el uso de la ecuación de Schrödinger para describir la función de onda del sistema, siendo necesario el uso de una ecuación que tenga en cuenta estos efectos relativistas. Por ello, si se toma la ecuación de Klein-Gordon, la cual surge a partir de pasar a considerar la energía del sistema como una energía relativista, por lo que se pasa de

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \rightsquigarrow \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

manteniendo la igualdad de que

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \wedge \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

Además de este cambio de la energía, en lugar de incluir ésta directamente en la ecuación, se introduce como su cuadrado (pues de la otra forma se obtienen resultados inconsistentes). Por ello, realizando una analogía con la ecuación de Schrödinger en donde únicamente se cambia el valor de la  $E$  clásica a la relativista y se introduce en la ecuación como su cuadrado, se obtiene la **ecuación de Klein-Gordon**:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi(\vec{r}) \quad (2.14)$$

que como podemos observar, es igual a una ecuación de ondas más un término adicional, o de igual forma, es igual a la ecuación electromagnética en forma cuadvivectorial salvo factores. A su vez, esta ecuación puede escribirse de la forma

$$\left( p^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}) = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi(\vec{r})$$

en donde si se tiene una fuente puntual  $q\delta(\vec{r})$ , se puede integrar por medio del plano complejo (usando el *Teorema de los Residuos*), obteniendo

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi(\vec{r}) - q\delta(\vec{r})$$

## 2.4. Vías para obtener información sobre el potencial nuclear

---

cuya solución es

$$\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r} e^{-mcr/\hbar} \quad (2.15)$$

que es el **potencial de Yukawa**, donde ajustando el valor de  $m$  se obtuvo que  $m \sim 300m_e \sim 150$  MeV, donde posteriormente dicha masa experimental del pión resultó ser 138 MeV.

Otra de las consecuencias cruciales que trae la ecuación de Klein-Gordon es que ahora la densidad y la corriente vienen dados por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.16)$$

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \quad (2.17)$$

donde podemos observar cómo ahora la densidad  $\rho$  no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad, al igual que ocurría bajo la ecuación de Schrödinger, ya que ésta no es definida positiva, sino que puede tomar valores tanto positivos como negativos. Esto exige que ahora se la interprete como una *densidad de carga*.

### 2.4.4 Vía experimental: scattering nucleón-nucleón

Para realizar un experimento que nos proporcione datos acerca de la interacción nuclear únicamente tenemos la opción de observar la difusión de partículas por los nucleones, de forma que intervenga la interacción fuerte. Para ello, se suele realizar un proceso de scattering de neutrones (proyectiles) sobre núcleos, ya que de esta forma la interacción electromagnética no interviene, intentando evitar todo lo posible que se produzca scattering múltiple (i.e. dispersión por más de un núcleo), por lo que el blanco ha de ser láminas muy delgadas (de un único núcleo de espesor en el caso ideal).

Para realizar el estudio de dicha interacción, vamos a utilizar un modelo muy similar al usado en el deuterón (de pozo cuadrado) solo que aquí estaremos en el caso de partículas no ligadas, es decir, con energía  $E > 0$ .

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Además, en este scattering el parámetro de impacto deberá ser como mucho del orden de  $R \sim 1$  fm ya que éste es el alcance de la fuerza fuerte.

Para la descripción de la partícula incidente (una partícula libre, luego se suele describir como una onda plana) se va a utilizar esta vez un desarrollo en ondas esféricas. Es decir, la onda plana incidente se pone como combinación lineal de ondas esféricas con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . La ventaja de este formalismo es que siempre que la energía de las partículas incidentes sea baja podremos quedarnos únicamente con el primer término con  $\ell = 0$ .

Esto se puede hacer porque si utilizamos la analogía clásica, sabemos que  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \Rightarrow L = mvr \sin \alpha = mvr \frac{R}{r} = mvR$ , y a su vez, cuánticamente el momento angular toma los



#### 2.4.4. Vía experimental: scattering nucleón-nucleón

---

valores  $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \hbar\ell$ , por lo que igualándolos:

$$L_c = L_q \implies mvR = \hbar\ell$$

imponiendo que  $mvR \ll \hbar$ , se tiene que  $\ell \sim 0$ , por lo que solo contribuirá de una forma significativa dicho término. Es decir, cuando se verifique que  $v \ll \hbar/mR$ , lo que implicará una energía cinética para los proyectiles de

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ll \frac{\hbar}{2mR^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2 R^2} \approx \frac{(200 \text{ MeV fm})^2}{2(1000 \text{ MeV})(1 \text{ fm})^2} \approx 20 \text{ MeV}$$

$$T \ll 20 \text{ MeV}$$

que es la energía incidente que deben tener los proyectiles para poder utilizar la aproximación de  $\ell = 0$  únicamente.

#### Ecuación de Schrödinger en sistema CM

Resolviendo la ecuación de Schrödinger en el sistema centro de masas (CM) para el pozo de potencial anterior, la cual tomará la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r)$$

donde  $m$  representa la masa reducida del sistema, que será (scattering nucleón-nucleón)  $m = \frac{m_p m_p}{m_p + m_p} = \frac{1}{2}m_p$ . De esta ecuación se obtienen las soluciones para la región I y II (i.e. para  $r < R$  ó  $r > R$ ):

**Para la región I:**  $r < R$ :  $u(r) = A \sin k_1 r + B \cos k_1 r$ , con

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} \quad (2.18)$$

en donde usando la condición de regularidad:  $u \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$  implica que  $B = 0$ .

**Para la región II:**  $r > R$ :  $u(r) = C' \sin k_2 r + D \cos k_2 r$ , con

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (2.19)$$

que en este caso, a diferencia de lo que ocurría con el deuterón, el término  $E$  es positivo y por tanto  $k_2 \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, esta solución la podemos escribir de la forma

$$u(r) = C \sin(k_2 r + \delta) \quad (2.20)$$

donde  $\delta$  es el *defasaje* de la onda, de forma que  $C' = C \cos \delta$  y  $D = C \sin \delta$ .

Además de esto, ambas soluciones deben cumplir las condiciones de contorno. Es decir, continuidad y derivabilidad en  $r = R$ , lo que provoca que:

$$\begin{aligned} C \sin(k_2 R + \delta) &= A \sin k_1 R \\ k_2 C \cos(k_2 R + \delta) &= k_1 A \cos k_1 R \\ \implies k_2 \cot(k_2 R + \delta) &= k_1 \cot k_1 R \equiv -\alpha \end{aligned} \quad (2.21)$$

**ecuación trascendental** que nos permite, conocido  $E$ , obtener el desfase  $\delta$  en función de  $V_0$  y  $R$ , o al revés: calcular teóricamente  $E, V_0$  y  $R$  y estimar con ello el valor de  $\delta$ , para compararlo después con el experimental.

## 2.5 Sentido físico y utilidad de la solución

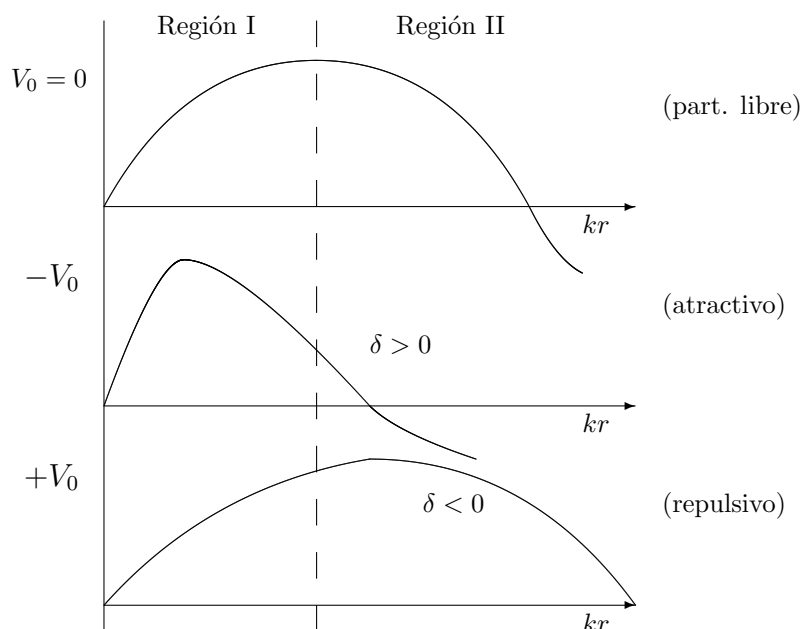


Figura 2.1: Potencial obtenido en función del tipo de pozo cuadrado impuesto: el de una partícula libre ( $V = 0 \forall r$ ), un potencial atractivo (si  $V = -V_0 < 0$ ) ó repulsivo si  $V = V_0 > 0$ . En estos casos cambiará el desfase de la onda (introducido en (2.20)), resultando éste positivo para potenciales atractivos y negativo para potenciales repulsivos.

En función del tipo de potencial que estemos viendo tendremos una solución diferente, las cuales se muestran en la Figura 2.1.

- Si  $V_0 \rightarrow 0$  se tiene una situación equivalente a cuando no hay centro difusor, por lo que la solución será idéntica a la de una partícula libre (no *ve* ningún potencial). Por ello se tiene que  $k_1 = k_2$  y  $\delta = 0$ , es decir las longitudes de onda en las dos regiones son idénticas.

Este es el caso que se obtendrá cuando el proyectil pase lo suficientemente lejos del blanco como para que la interacción fuerte ya no se aprecie, es decir, con un parámetro de impacto  $r \gtrsim R$ .

### 2.5.1. Sección eficaz de scattering para $\ell = 0$

---

- En cambio, si se tiene un potencial atractivo:  $V_0 < 0$ , que será el caso en que el proyectil pasa cerca del núcleo para notar la interacción fuerte, la cual es atractiva a esas distancias. En este caso se obtiene que  $k_1 > k_2 \Rightarrow \lambda_1 < \lambda_2$  y por tanto  $\delta > 0$ . Es decir, el nodo (donde tiene lugar el máximo de la función) se desplaza hacia la izquierda sin deformar el resto de la función.
- Para un potencial repulsivo:  $V_0 > 0$ , situación análoga a cuando el proyectil pase tan cerca del blanco como para notar su pared repulsiva (o bien, si tenemos en cuenta la interacción electromagnética con proyectiles formados por protones, será el caso normal puesto que el proyectil y el blanco se repelen). En este caso, se obtiene que  $k_1 > k_2 \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2$  y por tanto  $\delta < 0$ . Es decir, el nodo se desplaza hacia la derecha.

### 2.5.1 Sección eficaz de scattering para $\ell = 0$

Ya hemos visto que es recomendable poner la onda plana incidente (partículas libres) en función de ondas esféricas, lo que nos permite para energías bajas quedarnos únicamente con el término  $\ell = 0$ . Por ello, tendremos una función de onda incidente de la forma

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell j_\ell(kr) \\ \xrightarrow{\ell=0} \psi_{\text{in}} &= \frac{A}{2ik} \left( \frac{1}{r} e^{ikr} - \frac{1}{r} e^{-ikr} \right)\end{aligned}$$

es decir, es una combinación de una onda que se aleja del blanco y otra que se acerca al blanco (la que lleva un  $ikr$  ó un  $-ikr$  en la exponencial, respectivamente). Observemos que es finita, puesto que se anula cuando  $r \rightarrow 0$  ( $A$  es una constante de normalización únicamente).

---

---

**Cuestión 17.**  *Demostrar que, una vez se tiene el desarrollo en ondas esféricas (el sumatorio a  $\ell$ ), se puede pasar a la última expresión, que es una combinación lineal de una onda que se aleja y otra que se acerca al blanco.*

---

---

Por lo tanto, se tiene que la onda incidente tiene una contribución de onda esférica que se acerca al blanco y otra que se aleja, y a su vez la onda difundida será otra onda esférica alejándose del blanco, por lo que llegamos a que lo único que puede producirse es un cambio de fase de dicha onda, por lo que no puede haber creación ni destrucción de partículas. Así, la función de ondas debe tomar la forma

$$\psi(r) = \frac{A}{2ik} \left( \frac{1}{r} e^{i(kr+\beta)} - \frac{1}{r} e^{-ikr} \right)$$

donde  $\beta$  denota el cambio de fase que puede haberse producido. Por otro lado, tenemos la solución de la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \frac{C}{r} \sin(kr + \delta_0) = \frac{C}{r} \frac{e^{i(kr+\delta_0)} - e^{-i(kr+\delta_0)}}{2i} \\ &= \frac{C}{2i} e^{-i\delta_0} \left( \frac{1}{r} e^{i(kr+\delta_0)} - \frac{1}{r} e^{-ikr} \right)\end{aligned}$$

en donde se utiliza  $\delta_0$  para denotar el defasaje en lugar de simplemente  $\delta$  para recordar que estamos con la aproximación de que únicamente hay término  $\ell = 0$ . Comparando esas dos soluciones obtenemos que se debe verificar  $\beta = 2\delta_0$  y  $A = Cke^{-i\delta_0}$ .

### 2.5.2 Amplitud de la onda difundida

Una vez conocidas las soluciones se quiere extraer la información únicamente de la función de onda difundida, que es la que nos interesa para obtener las propiedades de la interacción ocurrida en el proceso de scattering. Por ello, nos interesa únicamente cómo es la función de onda en la región II (que será la correspondiente al proyectil una vez éste ha sido difundido), y como  $\psi = \psi_{\text{in}} + \psi_{\text{dif}}$ :

$$\psi_{\text{dif}} = \psi - \psi_{\text{in}} = \frac{A}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) \frac{e^{ikr}}{r}$$

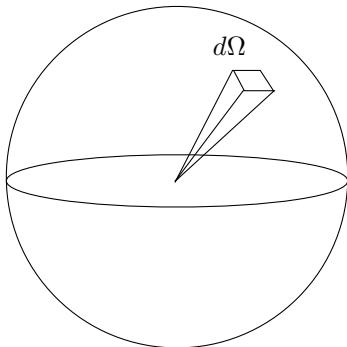
función que tendrá una corriente asociada de la forma (ver ecuación (2.17)):

$$j_{\text{dif}} = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi \right) = \frac{\hbar |A|^2}{mkr^2} \sin^2 \delta_0$$

Donde, por otra parte, la corriente incidente será

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar k |A|^2}{m}$$

es decir, la correspondiente a una partícula libre.



ondas esféricas difundidas

de forma que

$$d\sigma = \frac{j_{\text{dif}} r^2 d\Omega}{j_{\text{in}}}$$

Para observar la onda difundida, experimentalmente se pone un detector a un cierto ángulo respecto a la dirección de incidencia, con lo que se puede ver la cantidad de partículas difundidas en dicha dirección. Por ello, el dato que nos interesa conocer es la sección eficaz diferencial,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , que representa la probabilidad por unidad de ángulo sólido de que una partícula incidente sea difundida en ese  $d\Omega$ , y que a grandes rasgos vendrá dada por

$$\mathcal{P} = \frac{j_{\text{dif}}(d\Omega)}{j_{\text{total}}} \quad (2.22)$$

y sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente se llega a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \quad (2.23)$$

de donde se puede obtener la sección eficaz total, ya que ésta viene dada por  $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ , que para ondas  $\ell = 0$  debe ser isótropa (puesto que éstas son isótropas), obteniendo

$$\sigma = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{k^2} \quad (2.24)$$

## Conclusiones

Estimando los valores de la profundidad y el alcance del potencial nuclear ( $V_0$  y  $R$ ) se puede obtener el defasaje  $\delta_0$  teóricamente, lo cual nos permite determinar la sección eficaz que se debería obtener, y que posteriormente se compara con los datos experimentales. Pero a pesar de esto, todavía no se tiene los suficientes datos debido a que a un resultado concreto se puede llegar con diferentes funciones (i.e. un resultado concreto no tiene una función determinada si no que lo cumplen varias funciones).

Para el caso en que estemos a muy baja energía (es decir cuando son válidas las aproximaciones efectuadas) podemos estimar el valor de  $\sigma$ . Suponiendo una energía  $E \leq 10$  keV y tomando  $V_0 \sim 35$  MeV podemos obtener el valor de  $k_1$  y  $k_2$  a partir de las ecuaciones (2.18) y (2.19), obteniendo

$$\begin{aligned} k_1 &\approx 0.92 \text{ fm}^{-1} \\ k_2 &\approx 0.016 \text{ fm}^{-1} \end{aligned}$$

Volviendo a la *ecuación trascendental* ya vista (2.21):

$$\boxed{k_2 \cot(k_2 R + \delta) = k_1 \cot k_1 R \equiv -\alpha}$$

podemos desarrollarla de la forma

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{\cos k_2 R + \frac{\alpha}{k_2} \sin k_2 R}{1 + \alpha^2/k_2^2}$$

por lo que la sección de scattering será (usando la ecuación (2.24)):

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_2^2 + \alpha^2} \left( \cos k_2 R + \frac{\alpha}{k_2} \sin k_2 R \right) \quad (2.25)$$

en donde podemos ver que la sección eficaz dependerá de la energía (dependencia que va dentro de  $k_2$ ). Tomando un radio  $R \sim 2$  fm (el que obtuvimos en el caso del deuterón para  $V_0 \sim 35$  MeV) se obtiene que  $\alpha \sim 0.2 \text{ fm}^{-1}$ , por lo que  $k_2^2 \ll \alpha^2$  y  $k_2 R \ll 1$ . Y de esta forma

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{\alpha^2} (1 + \alpha R) \approx 4.6 \text{ b}$$

donde  $1 \text{ b} \equiv 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ . Es decir, a baja energía la sección eficaz *es constante*.

Yendo al experimento, se obtiene que efectivamente la sección eficaz experimental es constante para energías bajas. Sin embargo, obtenemos un valor de  $\sigma \sim 20$  b, que dista mucho del valor  $\sim 4.6$  obtenido teóricamente (hay un factor 4 de diferencia que habría que explicar).

### 2.5.3 Dependencia de $\sigma$ respecto del spin

Un hecho importante que no se ha tenido en cuenta en la descripción anterior del scattering de nucleón-nucleón es que estas dos partículas tienen spin, por lo que habrá una interacción de éstos no despreciable (un hecho que apoya esta afirmación es, por ejemplo, que en el deuterón únicamente se tiene el estado con spines paralelos, no produciéndose un deuterón con spines antiparalelos; y otro puede ser el oxígeno, que tiene los estados ORTO y PARA, pero éstos tienen secciones eficaces diferentes).

Como ya razonamos en §2.3, el spin total  $\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_n$  podrá tomar dos valores posibles: un estado singlete  $S = 0$  ó tres estados triplete  $S = 1$ . Por ello, asumiendo que la probabilidad de cada uno de los cuatro estados es la misma, podemos concluir que la sección eficaz, que será la suma de las secciones eficaces para cada uno de los posibles estados, tendrá la forma:

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s$$

donde  $\sigma_t, \sigma_s$  denotan las secciones eficaces para los estados triplete y singlete, respectivamente. Tomando de nuevo como referencia al deuterón ( ${}^2H$ ), se conoce que  $\sigma_t = 4.6$  b (ya que en el deuterón todas las configuraciones existentes son triplete), y que  $\sigma = 20.4$  b, por lo que

$$\sigma_s = 67.8 \text{ b}$$

**Conclusión:** existe una gran diferencia entre las secciones eficaces de los estados singlete  $\sigma_s$  y triplete  $\sigma_t$ , por lo que la fuerza nuclear debe depender fuertemente del spin.

### 2.5.4 Longitud de scattering y alcance efectivo

Hemos visto cómo experimentalmente se puede determinar los valores del alcance efectivo y de la longitud de scattering, ambos relacionados con las características del potencial:

$$\begin{aligned} \text{Longitud de scattering} &\sim \text{Intensidad del potencial} \sim V_0 \\ \text{Alcance efectivo} &\sim \text{alcance del potencial} \sim R \end{aligned}$$

Por lo que nos será de ayuda definir la **longitud de scattering**  $a$  de la forma:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma \equiv 4\pi a^2 \quad (2.26)$$

que recordando la ecuación (2.24) se obtiene

$$a = \pm \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k} \quad (2.27)$$

donde es más frecuente tomar el signo negativo, debido a que cuando se hacen desarrollos de scattering por esferas duras, se obtiene una expresión de la forma  $\delta = -k_c$  haciendo dicha elección más sencilla.

Para que  $a$  sea finita cuando  $k \rightarrow 0$ , se debe cumplir que  $\delta_0 \rightarrow 0$  también, y de ahí que podamos aproximar

$$\psi_{\text{dif}} = \frac{A}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) \frac{e^{ikr}}{r} \approx A \frac{\delta_0}{k} \frac{e^{ikr}}{r} = -Aa \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.28)$$

por lo que  $a$  aparece en la amplitud de la onda difundida.

### Relación de $a$ con la intensidad del potencial

**NOTA:** de aquí en adelante se considera la definición (2.27) para la longitud de scattering con el signo  $-$  como habíamos dicho, por lo que para baja energía  $a \approx -\delta_0/k$ , por lo que la función de onda difundida  $u(r)$  tomará la forma

$$u = C \sin(k_2 r + \delta) \approx C \sin k_2(r - a) \approx C k_2(r - a)$$

es decir, lineal con  $r$ , siendo  $a$  el punto donde la función radial difundida se anula.

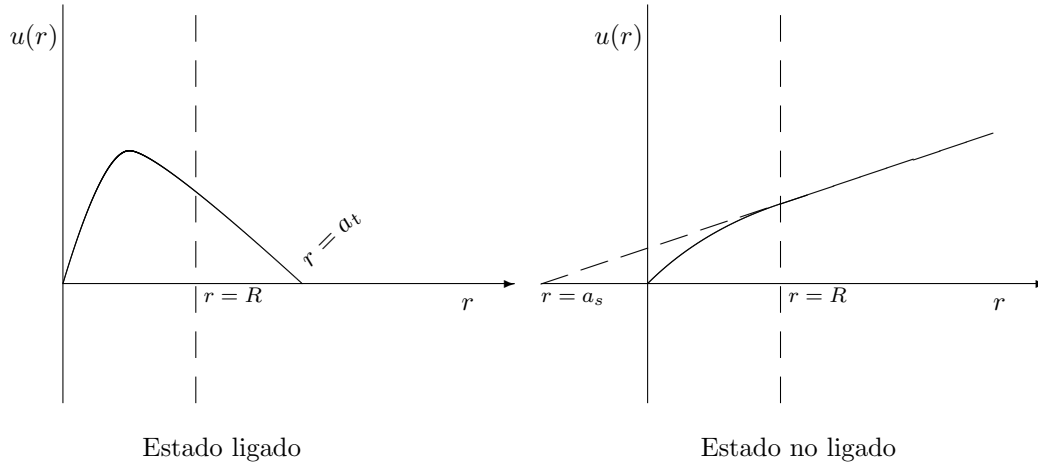


Figura 2.2: Representación de la función radial  $u(r)$  para estados ligados y no ligados. En cuyo caso obtendremos una longitud de scattering negativa o positiva.

**Para el triplete:**  $a_t > 0$  Esto implica que es un estado ligado, puesto que  $u(r)$  se limita a una región acotada en torno al núcleo (i.e. a distancias  $\lesssim R$ ), por lo que la función de onda  $\psi = u(r)/r$  está prácticamente acotada al interior del pozo de potencial (i.e. es un estado ligado).

**Para el singlete:**  $a_s < 0$  Por lo que será un estado no ligado, ya que  $u(r)$  crece linealmente con  $r$ , por lo que  $\psi = cte$  en todo el espacio, i.e. es una partícula libre. La razón de que se produzca esto como podemos ver es que en la región  $r < R$ ,  $u_I(r)$  no se ha curvado lo suficiente (i.e. todavía no ha alcanzado su máximo) por lo que  $u_{II}(r)$  sigue creciendo en lugar de tender a cero, y por tanto no produciendo un estado ligado, como podemos ver en la Figura 2.2.

Por lo anterior, el signo de la longitud de scattering  $a$  nos muestra directamente si el estado considerado es un estado ligado o no ligado.

### Definición de alcance efectivo

Recordemos que todo lo visto hasta ahora sólo es válido si la aproximación que efectuamos de tener una única onda  $\ell = 0$  se cumple, es decir, estamos a bajas energías:  $E < 20$  MeV. Sin embargo, estas aproximaciones efectuadas de que  $k \rightarrow 0$  ( $E$  muy baja) dejan de cumplirse mucho antes de tener un valor  $\sim 20$  MeV aunque todavía se pueda seguir considerando que solo hay  $\ell = 0$ . Por ello, se introduce el **alcance efectivo**

$r_0$ , que surge de si en lugar de quedarnos en el primer término del desarrollo efectuado mantenemos también el segundo:

$$k \cot \delta_0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2 + \mathcal{O}(k^2)$$

es decir, si  $k \rightarrow 0$  se recupera la definición de  $a$ .

La interpretación física de este alcance efectivo se puede ver a partir de la Figura 2.2 para el estado no ligado, en donde  $r_0$  es la diferencia que existe entre las soluciones de la región I y de la región II:

$$r_0 = 2 \int_0^\infty \left[ \left( \frac{u_I}{a} \right)^2 - \left( \frac{u_{II}}{a} \right)^2 \right] dv$$

y que cuando estamos en la región II ( $r > R$ ), ambas funciones radiales coinciden, por lo que se anula el integrando.

### Scattering nucleón-nucleón

En un scattering entre dos nucleones existen tres posibilidades diferentes:  $p-p$ ,  $n-n$  ó  $p-n$ , es decir, entre dos protones, dos neutrones, o un protón y un neutrón. En cualquier caso, sabemos que los únicos estados posibles serán  $^1S_0$  ó  $^3S_1$  (notación  $^{2S+1}L_J$ ), ya que  $S = \{0, 1\}$  y  $\ell = 0$  por ser dos partículas libres, es decir, o estado singlete o triplete.

Para  $p-p$  y  $n-n$  únicamente es posible el estado singlete, ya que sabemos que la función de onda total de ambos nucleones debe ser antisimétrica (por ser éstos fermiones) pero esto requiere que la parte de spin sea antisimétrica, ya que la parte espacial es simétrica. Y experimentalmente se obtiene:

$$\begin{array}{ll} (n-p) & a_s = -23.7 \text{ fm} \quad a_t = 5.42 \text{ fm} \\ & r_{0s} = 2.73 \text{ fm} \quad r_{0t} = 1.74 \text{ fm} \\ (p-p) & a = -7.82 \text{ fm} \\ & r_0 = 2.79 \text{ fm} \\ (n-n) & a = -16.6 \text{ fm} \\ & r_0 = 2.66 \text{ fm} \end{array}$$

Es decir, para  $n-p$  (que sería en el estado ligado un deuterón) se tiene que  $a$  es negativo para el estado singlete y positivo para el triplete. Y como ya explicamos anteriormente,  $a < 0$  indica estados no ligados, mientras que  $a > 0$  indica estados ligados. De esta forma, se obtiene la razón por la que el deuterón únicamente está formado por estados triplete: son los únicos que proporciona un estado ligado.

Así, salvo este estado triplete, todas las demás combinaciones producen estados no ligados ( $a$  negativo). Pero se hace visible un dato que no entra en contradicción con lo dicho en los últimos capítulos: hay simetría de carga en la interacción fuerte (es decir, ésta no varía si se cambia un neutrón por un protón) pero aquí observamos que el valor de  $a$  y de  $r_0$  sí es diferente para  $p-p$  y para  $n-n$ .

La razón de esto es que estos datos experimentales también están sujetos a la interacción electromagnética, por lo que los valores para un scattering  $p-p$  hay que corregirlos eliminando de ellos dicha interacción. Si se hace esto, se obtiene que  $a = -16.6 \text{ fm}$  y



#### 2.5.4. Longitud de scattering y alcance efectivo

---

$r_0 = 2.66$  fm, coincidiendo ya con los obtenidos para un  $n - n$ .

Aunque a pesar de esto sigue existiendo una cierta discrepancia para el scattering  $n - p$ , aunque esto se puede achacar a que esa longitud de scattering es muy sensible a la profundidad del pozo, lo que hace que pueda variar mucho en función del valor tomado para ésta.

Por último, decir que si se quieren comparar la interacción nuclear entre los tres modos posibles ( $n - n$ ,  $p - p$ ,  $n - p$ ) habría que evaluarlo en el estado singlete, ya que únicamente aquí (por ser un único estado) podemos estar seguros de comparar mismos estados. Ya que un triplete recordemos que tiene tres combinaciones posibles.